بحوث العمليات

تأليف

أ.د. أبو القاسم مسعود الشيخ

الناشر

المجموعة العربية للتدريب والنشر



2012

فهرسة أثناء النشر إعداد إدارة الشئون الفنية - دار الكتب المصرية
الشيخ، أبو السعود قاسم
بحوث العمليات/ تأليف: أبو القاسم مسعود الشيخ
ط1- القاهرة: المجموعة العربية للتدريب والنشر
443 ص : 24x17 سم.
الترقيم الدولي : 978-977-6298-33-0
1- بحوث العمليات أ- العنوان
ديوي: 658,57 رقم الإيداع : 2011/9982

الطبعة الأولى
2012



الناشر
المجموعة العربية للتدريب والنشر
8 أ شارع أحمد فخري - مدينة نصر - القاهرة - مصر
تليفاكس: 22759945 - 22739110 (00202)
الموقع الإلكتروني: www.arabgroup.net.eg
E-mail: info@arabgroup.net.eg
elarabgroup@yahoo.com

المحتويات

تمهيد

يتسم عالم اليوم بالاتساع والشمولية والصعوبة المتأتية أصلا من ندرة الموارد، وازدياد الطلب، وتعاظم المشكلات الصناعية والتجارية، واشتداد المنافسة. ولا عجب إذن أن يكرس علماء الإدارة الصناعية خصوصا، وخبراء الإنتاج والرقابة الإنتاجية، النوعية والكمية، جل اهتمامهم، لدراسة المشكلات العملية لتحقيق الاستغلال الأمثل للموارد المتاحة للأهداف المحددة.

لقد وجدت الصناعة، مثلا، أن كثيرا من التقنيات الرياضية المطورة تنطبق بصورة خاصة على المشكلات التي تواجهها. فالتقنيات الرياضية مثل البرمجة الخطية (Linear programming) وتحليل المسار الحرج (Critical path Analysis)، ونظرية اتخاذ القرارات تساعد جميعا على تحديد الحل الأمثل لكثير من الاحتمالات. وقد استخدمت بحوث العمليات في عدة مجالات، مثل الإنتاج (Production) والتسويق (Marketing) والتوزيع (Distribution) والرقابة المالية (Financial Control) معتمدة على مهارات الاقتصاديين والرياضيين والإحصائيين والمحاسبين والمهندسين.

في إطار هذه الأهمية، يأتي هذا الكتاب، الذي يتناول بالتفصيل والعمق من خلال المسائل التطبيقية، أبرز مكومات مادة بحوث العمليات، وهي محاولة لتقديم هذه التقنية الراقية إلى طلبتنا الأعزاء في المرحلة الجامعية الأولية، ولكافة المهتمين في الموضوع. وقد توخينا البساطة والتعميق في تقديم الأمثل التطبيقية إيمانا منا بأن هذا هو المدخل الأكثر نفعا وفاعلية في ترسيخ مادة بحوث العمليات في أذهان القارئ وتشويقه للمتابعة من خلال قيامه بإيجاد حلول لعشرات المسائل التي ضمناها في الكتاب.

وقد قسمنا الكتاب إلى خمسة عشر فصلا، تناولت من خلال الأمثلة والتعريفات

شرايين تقنية بحوث العمليات. فالفصل الأول مكرس كمقدمة وخلفية لهذه التقنية الرياضية، أما الفصل الثاني فهو يدخل في صلب موضوع البرمجة الخطية، بينما الفصل الثالث جاء مكرسا لوسائل صياغة مسائل البرمجة الخطية.

وفي الفصل الرابع، جاء التركيز على موضوع استخدام الطريقة البيانية في حل نموذج البرمجة الخطية، بينما جاء الفصل الخامس مكملا ومعززا لهذا الفصل، حيث الحديث بالأمثلة والشواهد عن أبرز طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول، وتعمقنا في شرح وتفسير النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية.

أما مشكلة النقل فهي موضوع الفصل الثامن، بينما وجدنا من الضروري أن يكون الفصل التاسع مكرسا لبرمجة الأعداد الصحيحة. ولأهمية موضوع تخطيط المشروعات، فقد أفردنا الفصل العاشر له. أما الفصل الحادي عشر تناول موضوع نظام التخزين والفصل الثاني عشر، فقد جاء مكرسا لموضوع نظام خطوط الانتظار، أما الفصل الثالث عشر خصص لموضوع المحاكاة باعتباره تقنية راقية لابد من تقديمها للطالب لكي يكون ملما تاما بكافة بحوث العمليات.

ثم جاء الفصل الرابع عشر، وهو فصل كرسناه بالكامل لموضوع مهم جدا ألا وهو نظرية المباريات، باعتبار هذه النظرية لها تطبيقاتها المعروفة في بحوث العمليات.

وأختتم الكتاب بلمحة عن برمجة تعدد الأهداف في الفصل الخامس عشر والذي يعتبر إضافة كاملة في هذه الطبعة بالإضافة إلى بعض التعديلات الهامة التي أضفت على الكتاب.

والأمل أن تكون بهذا الجهد نسدي خدمة إلى المكتبة العربية عامة، والمكتبة العلمية خاصة، وتخدم قضية العلم والمعرفة في وطننا العربي المتطلب إلى موطن قدم في عصر تحديات العلم والتكنولوجيا.

ومن اللـه التوفيق،،

المؤلف

أ.د. أبو القاسم مسعود الشيخ

الفصل الأول

بحوث العمليات

يتناول هذا الفصل الجذور العملية والنظرية لبحوث العمليات، مع تسليط الضوء على أبرز تطبيقاتها العملية، كما يبحث الفصل في مفهوم بحوث العمليات، ويشرح بأسلوب مبسط أبرز خطوات هذه العمليات.

الفصل الأول

١

بحوث العمليات (Operation Research)

1.1 مقدمة:

تعود الجذور العلمية والنظرية لبحوث العمليات إلى النماذج الأولى للبرمجة الرياضية وتطورها اللاحق، أما التطبيقات العملية لأساليب بحوث العمليات فقد ظهرت لأول مرة إبان الحرب العالمية الثانية عندما شكل الحلفاء فرق بحوث لدعم العمليات اللوجستية. وكل مشاكل التخطيط والسيطرة العملياتية. إذن التطبيقات الأولية لبحوث العمليات انطلقت من المؤسسة العسكرية ثم انتقلت إلى الميدان الصناعي، والمدني عموما بعد الحرب مباشرة.

وقد شهد النصف الثاني من هذا القرن تطورا جليا في تطبيق بحوث العمليات، بل وفي تطور أساليب تكتيكية جديدة أتاحت الفرصة لها ثورة (المعلوماتية Informatics) والكمبيوتر والتقدم النوعي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا.

واليوم يطلق مصطلح بحوث العمليات Operation Research أو مصطلح علم الإدارة Management science كما تسميه الجامعات الأمريكية على مجموعة من الأساليب والطرق الكمية التحليلية التي تسعى إلى صياغة وتطوير نماذج للمشكلات العملية، والمساعدة في عملية اتخاذ القرار بعد حساب متغيرات كل قرار (بديل). واختيار القرار الأمثل من بين البدائل المتاحة (أو الاستخدامات المتنافسة) بحيث يمكن تحقق أعلى مستوى من العائد المتوقع وتخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. وباختصار تعتبر بحوث العمليات أدوات تحليل نظامي أو منهجي للمشاكل التي تواجه منظمات الأعمال والمؤسسات الاقتصادية بما يمكن الإدارات من حل هذه المشاكل في الوقت الحقيقي (Real time) والتقليل من درجة المخاطرة (Risk) إلى

أقصى حد. أو حالات عدم التأكد المرافقة لبيئة الأعمال (Uncertainty) تأسيسا على ما تقدم يمكننا القول أن نطاق أساليب أو طريق بحوث العمليات غير محدد، كما أن هذه الأساليب هي في عملية تطور وإيضاح مستمر.

ومن ذلك يمكن تصور هذه الأساليب من منظور متكاملة من العمليات الذهنية التي يعبر عنها النموذج التدفقي الموضح في الصفحة التالية.

ويمكن شرح خطوات العمليات على النحو التالي:

1- تعريف وتحليل المشكلة (صياغة المشكلة).

2- بناء النموذج الرياضي.

3- حساب البدائل التي تسبب إجراءات المشكلة.

4- تحديد تأثير جميع البدائل المتاحة (الحلول المتاحة).

5- حساب المواصفات لاختيار القرار الأمثل.

6- مراجعة مشروع القرار الذي اختير للتنفيذ مستقبلا.

7- اتخاذ القرار النهائي لحل المشكلة.

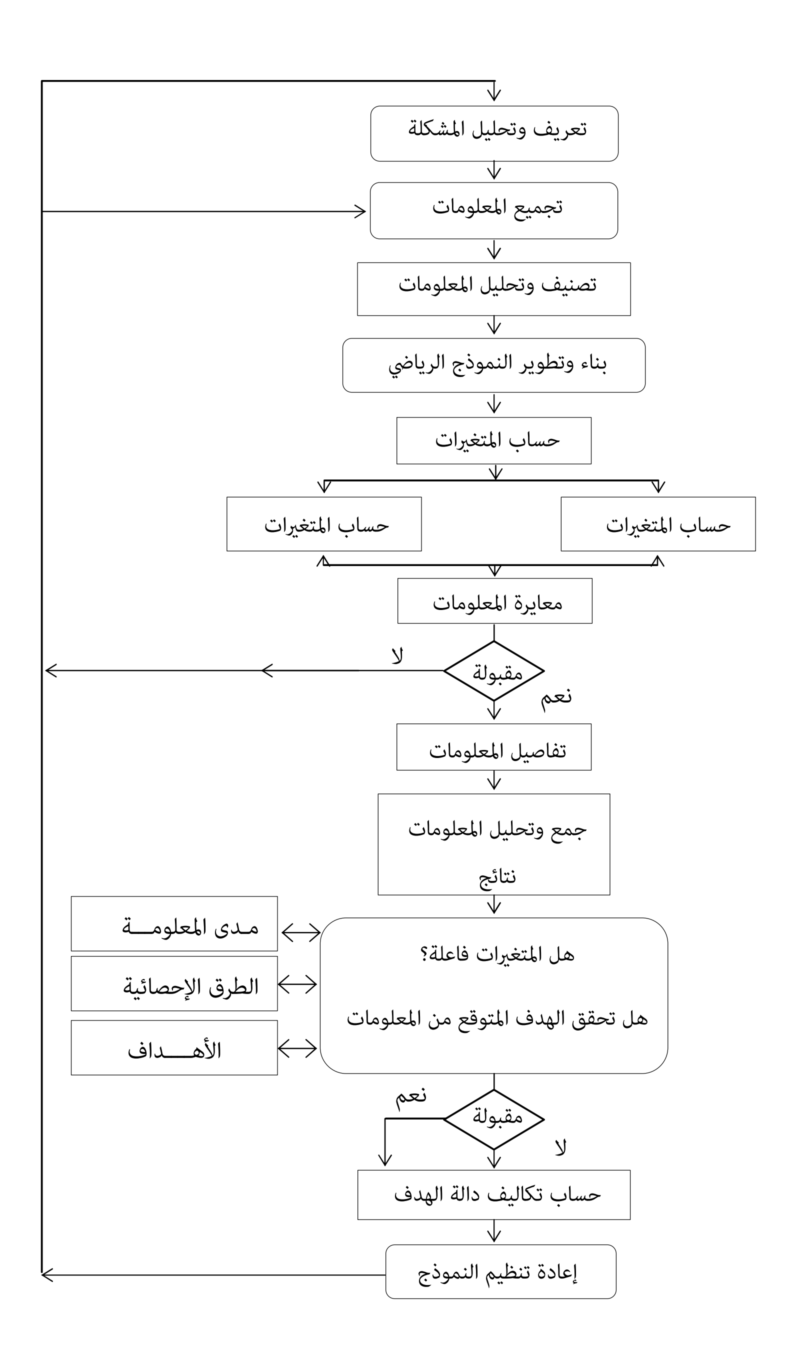
بناء على الخطوط العريضة لخطوات بحث العمليات التي ذكرت سالفا يمكن الدخول في بعضها بالتفصيل باعتبارها خطوات تنفيذية لبناء أي نمط لبحوث العمليات.

1- صياغة المشكلة (Formulating the problem):

يقصد بصياغة المسألة، اتخاذ الخطوات اللازمة لتحويل المشكلة من مسميات وصفية إلى رموز رياضية وصياغتها وفقا للعلاقة التي تربطها، سواء كانت خطية أو غير نمطية من خلال هدف المشكلة والقيود التي تشترطها. والخلاصة في هذه المرحلة يجب أن تكون:

أ - المشكلة بصورة كمية.

ب- تحديد واضح للهدف والقيود المفروضة عليه.


تعريف وتحليل المشكلة
تجميع المعلومات
تصنيف وتحليل المعلومات
بناء وتطوير النموذج الرياضي
حساب المتغيرات
حساب المتغيرات
حساب المتغيرات
معايرة المعلومات
لا
مقبولة
نعم
تفاصيل المعلومات
جمع وتحليل المعلومات
نتائج
مـدى المعلومــة
الطرق الإحصائية
الأهــــداف
هل المتغيرات فاعلة؟
هل تحقق الهدف المتوقع من المعلومات
نعم
مقبولة
لا
حساب تكاليف دالة الهدف
إعادة تنظيم النموذج

2- بناء النموذج الرياضي (Building the model)

يقصد ببناء النموذج الرياضي إيجاد العلاقة بين معاملات المشكلة (الثابتة والمتغيرة) في صورة رياضية صحيحة والتي يمكن بواسطتها حلها تحقيق الهدف المرغوب فيه.

3- تحليل لمعلومات (Information Analysis)

يقصد بتحليل المعلومات حساب المتغيرات المطلوبة وتطبيق طريقة حساسية المتغيرات في مجال الحل الأمثل والتأكد من مصداقية المعلومات من الناحية التطبيقية.

4- تنفيذ نتائج المعلومات (Implementation of information)

يقصد بتنفيذ نتائج الحل تنفيذ قيم المتغيرات التي تحقق الحل الأمثل واتخاذ القرار الإداري وفقا لهذه النتائج.

1.2 تطبيقات بحوث العمليات:

نظرا لتعدد تطبيقات بحوث العمليات بما يصعب حصرها إلا أنه يمكن ذكر التطبيقات التالية على سبيل المثال لا الحصر:

1- مشكلة نقل المواد (Materials transportation)
2- مشكلة التعيين والتخصيص (Assignment problem)
3- خلط النفط (Gasoline blending)
4- تخطيط الإنتاج (Production planning)
5- تخطيط المالية (Financial planning
6- اختيار الميزانية العامة (Selection of capital budgeting)
7- تخطيط أنماط استهلاك الطاقة (Energy planning)
8- تحديد المواقع الخدمية والإنتاجية (Facility location and layout)

9- تخطيط رحلات الطيران والسكك الحديدية	(Airline & railway planning)
10- التخطيط والتحكم في المخزون	(Planning and control of inventor)
11- تصميم الشبكات الكهربائية	(Electric network design)
12- تخطيط الإشارات الضوئية في الطرق	(Traffic signal planning)
13- تخطيط شبكات الري والصرف	(Water and waste network planning)
14- نظام صفوف الانتظار	(Waiting line system)
15- نظام المحاكاة	(Simulation system)
16- تخطيط المشروعات	(Project planning)
17- الصيانة والسيطرة على التكاليف	(Maintenance cost control)
18- التنبؤ	(Fore casting)
19- السيطرة النوعية	(Quality control)
20- تقييم الاستثمارات	(Investment evaluation)
21- ظروف المخاطرة وعدم التأكد	(Conditions of risk and uncertainty)

الفصل الثاني

البرمجة الخطيــة

في هذا الفصل يتضح بجلاء مفهوم البرمجة الخطية كتقنيـة رياضية راقية لاستغلال الموارد المحـدودة والوفـاء بالهـدف المنشـود، وذلـك مـن خـلال مناقشـة مستفيضـة لمفـردات البرمجة وخطوات صياغة مسائلها، والنموذج العام لأنماطها وتحقيق هذه الأنماط.

الفصل الثاني



البرمجة الخطية (Linear Programming)

2.1 مقدمة

البرمجة الخطية هي تكتيك رياضي يهتم بحل مشاكل الصناعة على وجه العموم فيما يتعلق بتصغير وتعظيم الدوال الخطية بوجود قيود أطرافها متساوية وأقل من وأكبر من، ويرجع حل هذه المعادلات للعالم (George B. Dantzig, 1947) ويستخدم تكتيك البرمجة الخطية لحل المشاكل العسكرية والمدنية والصناعية بالإضافة إلى تخطيط المدن ومجالات أخرى.

ومنذ عام 1947ف حيث نشر (Dantzig) لأول مرة طريقة حل البرمجة الخطية وسماها (Simplex) طريقة السمبلكس قام الكثيرون بتطوير هذه الطريقة لتحسين كفاءة مخرجاتها.

وأولى هذه المحاولات خرجت (1953ف) بواسطة المكتب الوطني للقياسات النمطية (National bureau of Standards) بالولايات المتحدة الأمريكية. وفي عام (1953ف) أصبح علم الحاسوب متاحا وأصبح استخدام المحل الرياضي بواسطة الحاسوب.

وفي (1958ف) طور (R. E. Gomory) طريق السمبلكس بما يسمى بطريقة (Cutting plane algorithm) وذلك بحل البرمجة الخطية بإجابة الأعداد الصحيحة في (1690ف) (A. H. Land and A. G. Doig) نشر بحثا لتطوير طريقة حل البرمجة الخطية بما يسمى (Branch-and-bound).

وحتى 1979ف طورت طريقة السمبلكس بواسطة بحاث من الاتحاد السوفيتي وسميت (L. G. Khachian). (Polynomial tire algorithm).

البرمجة الخطية إذن هي طريقة رياضية حديثة لتخصيص الموارد النادرة والمحددة من أجل تحقيق أهداف معنية حيث يكون من المستطاع التعبير عن الأهداف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقها في صورة معادلات أو متباينات رياضية.

2.2 تعريف مفردات البرمجة الخطية:

1- المتغيرات (Variables)

يقصد بالمتغير الذي يرمز له بقيمة مثل xi (j= 1,2,3, ………n)

2- المتغير المتحكم فيه (Continuous variable)

هو متغير تحت تصرف من يتخذ القرار.

3- المتغير المستمر (Continuous variable)

هو متغير ذو قيمة محصورة بين حدود عظمى ودنيا.

4- المتغير المتقطع (Discrete variable)

هو المتغير الذي يأخذ قيم موصوفة بدرجات معلومات

مثال X يمكن أن تأخذ القيم $10.32 , \frac{5}{2} , 0 , 1$

5- المتغير المتقطع (Linear Function)

هي الدوال أو المعادلات التي لا تأخذ في أسها إلا واحد فقط.

مثال $x_1 + x_2$ وليس $x_1 \log x_2$.

وتعتبر هذه الدوال من ذات المتغير المستمر

6- الدوال غير الخطية (Non liner Function):

هي عكس الدوال الخطية ويمكن أن يكون أسها أقل و أكثر من (1).

$$x^{\frac{1}{2}}, x^{3} e^{-3}, e^{-\frac{1}{2}}, \frac{1^{x}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

وتعتبر هذه الدوال من الدوال ذات المتغير المتقطع.

7- النمط الرياضي (Mathematical model)

هو نمط يحدد العلاقة بين متغيرات وثابت تحاكي واقع أي نظام، والنمط الرياضي الخطي هو الذي يحوي على معادلات خطية فقط.

8- المعادلات (Equations)

ويمكن تمثيلها بواسطة الآتي:

$$F(x) = b$$

ويعني هذا أن بعض الدوال تحتوي على متغيرات في الطرف الشمالي.

$$X = x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$$

وعلى طرف يمين يساوي (b)

9- الغير متعادلات (Inequalities)

ويقصد بها المعادلات التي طرفها الشمالي لا يساوي الطرف الأيمن فقط، بل يزيد أو يقل عنه. ويمكن التعبير عنها رياضيا على النحو التالي:

$$f(x) \leq b$$

$$f(x) \geq b$$

10- الأهـداف (Objectives)

ويمكن تمثيلها رياضيا بواسطة المعادلة التالية:

Minimize f(x) or maximize f(x)

وهو تعبير عن تصغير التكاليف أو المسافات أو تعظيم الربح أو الإنتاج.

11- القيـود (Constraints)

هي عبارة عن معادلات يجب أن تحقق رياضيا في ظل الهدف، ويمكن أن يعبر عنها رياضيا.

$$t(x) \leq b$$

$$t(x) \geq b$$

$$t(x) = b$$

ويعتمد على حالة الإنتاجية.

2.3 خطوات صياغة مسائل البرمجة الخطية:

تعبر صياغة مسائل البرمجة الخطية من الخطوات الأولى الأساسية لبناء نمط يسهل حله بواسطة البرمجة الخطية. وتبدأ أولا بتحديد المتغيرات التي يمكن التحكم فيها (Controllable variables) ومنها إلى تحديد الهدف.

ويمكن حساب المتغيرات التي يمكن التحكم فيها من خلال معطيات المسألة المطروحة للحل مثل عملية عزل مسكن لتصغير تكاليف التكييف والكهرباء، ففي هذه الحالة تعتبر Controllable variables على النحو التالي:

1- كمية المواد اللازمة للعزل.

2- مساحة الجدران التي يتطلب عزلها.

3- عدد العواصف المتوقعة.

4- عدد الستائر المستخدمة بالمنزل.

5- كمية المواد المستخدمة لعزل خزان المياه.

6- التغير في درجات الحرارة.

7- سرعة الرياح واتجاهاتها.

8- كمية أشعة الشمس التي يتعرف لها المنزل.

9- عدد أفراد الأسرة.

10- عدد مرات فتح الأبواب والنوافذ بالمنزل.

11- تكلفة مواد العزل.

نلاحظ أن المتغيرات الإحدى عشر التي ذكرت أعلاه لا يمكن التحكم فيها، ما عدا الستة متغيرات الأولى فإنه يمكن التحكم فيها وتسمى (Controllable variables) أما باقي المتغيرات فتعتمد على تكلفة التكييف والكهرباء وتعتبر غير متحكم فيها (Uncontrollable variables)

وتعرف في النمط الرياضي بالشكل الأتي:

x_1 = كمية المواد اللازمة للعزل الطولية.

x_2 = كمية المواد التي تعزل الحافظ بالوزن.

x_3 = كمية المواسير اللازمة.

x_4 = كمية العواصف التي تمر مع النوافذ.

x_5 = كمية المواد المستخدمة.

x_6 = كمية المواد اللازمة لعزل خزان المياه.

ولصياغة دالة الهدف تتطلب عادة بعض الأمثلة الآتية:

- تعظيم الربح (Max. prefit)
- تصغير التكلفة (Min. cost)
- تصغير الوقت الضائع (Min. overtime)
- تعظيم استخدام الموارد المتاحة (آلات، مواد، الخ) (Max. resources)
- تصغير زمن غياب العاملين (Min. absenteeism)
- تصغير زمن عطل الآلات (Mix. tool breakdown
- تصغير المخاطرة في الشغل (Min. risk of work)
- تعظيم احتمال أن العمليات تقع ضمن المواصفات (Max. prob. Process. Spes)

ويصعب هذه الأهداف معادلات القيود والتي غالبا ما تخضع إلى الأسباب الآتية:

- المواد الخام المتاحة (Limited raw material)
- الميزانية المخصصة (Limited budget)
- الزمن المخصص (Limited time)
- القوى العاملة المتاحة (Limited personnel)
- القدرة والمهارة المتاحة (Limited ability or skill)

ويبقى العامل الثالث والأخير في صياغة المسائل وأنماط البرمجة الخطية وهو أن لا يسمح للمتغيرات بأن تأخذ قيم خيالية (سالبة) (No negativity).

2.4 النموذج العام لأنماط البرمجة الخطية:

يمكن كتابة النموذج العام لأنماط البرمجة الخطية رياضيا على النحو الآتي:

دالة الهدف Objective:

r لكل Maximize $a_{r,1} + a_{r,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{rn}x_n$

s لكل Maximize $a_{s,1} + a_{s,2} + \ldots\ldots\ldots a_{sn}x_n$

تحت شرط Subject to

$$A_{ti}\,x_1 + a_{t2}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{tn}\,x_n \;\overset{\le}{\ge}\; b \text{ لكل } t$$

حيث

$$x_1\,,\,x_2\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, X_n \ge 0$$

2.5 تحقيق أنماط البرمجة الخطية (Model validity)

من المعروف أن أي نموذج رياضي على صورة برمجة خطية لا يمثل الواقع بالضبط ونحن لا نستطيع أن نقول أن هذا النموذج يمكن تحقيقه بنسبة ما في الحياة العملية وذاك بنسبة أخرى. ويمكن بالتالي تعريف النموذج وفقا للمتوقع من الهدف المحدد مسبقا. وتتخذ خطة تحقيق نماذج البرمجة الخطية وفقا للمراحل الآتية:

1- معايرة تركيب النمط الرياضي.

2- معايرة منطق النمط الرياضي.

3- معايرة تصميم النمط ومستوى المعلومات ومصداقيتها.

4- معايرة ردود تأثير متغيرات النمط الرياضي.

ويقصد بمعايرة تركيب النمط الرياضي النظر إلى جميع المتغيرات التي يحتويها النمط وعلاقتها ببعضها وعلاقتها بالمنظمة التي تحتويها جميع المتغيرات ومدى انعكاساتها للحال الفعلية تحت الدراسة.

أما منطق النمط الرياضي فيقصد به الدقة في تمثيل المتغيرات للمعلومات التي يحتويها النظام الذي تحت الدراسة (System) بالإضافة إلى منطقية هذه المتغيرات ومحاكاتها وتسلسلها للواقع، على سبيل المثال؛ هل اتخاذ هذه السياسة المصاغة في النمط الرياضي تؤدي إلى زيادة في الربح أو تقليل في التكاليف .... الخ.

إن المعلومات المستخدمة في النمط الرياضي كمدخلات (Input) هي عصب تحقيق النمط الرياضي، فصحتها تعكس مصداقية النموذج ومحاكاته للنظام الذي تمت دراسته والمعايرة، وهذا يعتمد على طرق تجميعها سواء من التجارب المعملية أو من السوق التجاري أو الصناعي ومدى دقتها والابتعاد عن تقريبها وتنبؤها بواسطة الطرق الإحصائية.

إن استجابة النمط الرياضي للمعلومات تعكس مدى مصداقية النموذج الرياضي. فمثلا العلاقة بين الاقتصاد القوي للدولة وتوفر وسائل المواصلات والطرق.. الوصول إلى تنبؤ معلومات بواسطة النمط الرياضي حسب المتوقع يعكس ذلك مصداقية النموذج الرياضي.

تأسيسا على ما تقدم يمكن استنتاج فرضيات البرمجة الخطية وهي:

1- أن يكون هناك هدف واضح ومحدد مثل تحقيق أعلى عائد (التعظيم) أو تقليل التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. وبالطبع لا يوجد هدف واحد إذ تتغير درجة تحقيق الهدف بالتغيرات التي تحدث في البرنامج.

2- أن يكون هناك عدد من المتغيرات التي تتأثر في تغيرها بالقرارات والتي تؤثر في الهدف المنشود.

3- إن التغير الذي يحصل في المتغيرات يخضع لحدود أو قيود تفرضها المواد المتاحة والتي يمكن استخدامها في كل أو جزء من هذه المتغيرات.

4- وجود علاقة خطية معروفة ومحددة بين المتغيرات ودرجة تحقيق الأهداف المنشودة وكذلك بين الزيادة والنقصان في المتغيرات ودرجة استعمال الموارد. وهذا الشرط يعني بالتغير الرياضي أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات أو متباينات من الدرجة الأولى.

الفصل الثالث

صياغة مسائل البرمجة الخطيـــة

إن هـذا الفصـل معـزز بالأمثلـة التطبيقيـة التـي تتعقـل بكيفية صياغة مسائل البرمجـة الخطيـة، مـع التركيـز عـلى شروط عـدم السـلبية مـن خـلال المزيـد مـن الأمثلـة التوضيحية.

الفصل الثالث



صياغة مسائل البرمجة الخطية
Problem Formulation

3.1 مقدمـة:

يهتم هذا الفصل بصياغة مسائل البرمجة الخطية والتي تعني تحويل المشاكل الحقيقية إلى مسائل رياضية من خلال خطوات يحسب فيها شكل النموذج الرياضي ومستوى المتغيرات، نوع المتغيرات، وحدود المشكلة ومركباتها وذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1:

تنتج شركة إنتاجية ثلاثة منتجات. وكل منتج يحتاج إلى ثلاثة أنواع من المدخلات هي: المادة الخام، الطاقة البشرية، والطاقة الميكانيكية، ويوضح الجدول رقم (3-1) احتياجات وحدة المنتج من مدخلات الإنتاج والإنتاجية لكل مدخل والربح المتوقع لكل منها:

جدول (3-1)

البيــان	احتياجات المنتج من مدخلات الإنتاج			كمية المدخلات المتاحة
	منتج 1	منتج 2	منتج 3	
المادة الخام كجم	2	3	4	1200 كجم
طاقة بشرية	1	2	3	400 ساعة
الطاقة الميكانيكية	3	1	6	1500 ساعة
الربح د.ل. للوحدة	10	7	5	

المطلوب:

صياغة نموذج البرمجة الخطية لتحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل منتج لتعظيم الربح إلى أقصى حد ممكن.

الحل:

1- **تحديد متغيرات النموذج (Determination of the decision variables):**

باعتبار أن المطلوب كمية كل منتج يسعى إلى تعظيم الربح، عليه فإن المتغيرات هي:

x_1 كمية الإنتاج من المنتج 1

x_2 كمية الإنتاج من المنتج 2

x_3 كمية الإنتاج من المنتج 3

2- **تحديد دالة الهدف (Formulation of the objective function):**

باعتبار أن الهدف من تحديد كمية الإنتاج من كل منتج هو تعظيم الربح الإجمالي من كل المنتوجات التي تنتجها الشركة، عليه فإن دالة الهدف وفقا للمعلومات الموضحة في الجدول (3-1):

تعظيم $\text{Maximize } Z = 10x_1 + 7x_2 + 5x_3$

3- **تحديد القيود (Determination of the constraints):**

تتمثل القيود المفروضة على الإنتاج في التحكم في كمية المواد الخام والطاقة البشرية والطاقة الميكانيكية، ولتحقيق هذه القيود يجب أن لا تحدث أي زيادة في الطلب على هذه المدخلات لتعظيم كمية الإنتاج من المنتوجات الثلاثة وبالتالي يمكن صياغة القيود على النحو الآتي:

المواد الخام $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1200$

الطاقة البشرية $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 900$

الطاقة الميكانيكية $2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 1500$

3.2 شروط عدم السلبية Non-Negativity:

باعتبار أن كمية الإنتاج يجب أن تكون حقيقية وليست خالية، أي يجب أن تكون موجبة في حالة إنتاج المنتج وصفر في حالة عدم إنتاج المنتج، ويكون قيد عدم السلبية على النحو التالي:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ويمكن تلخيص ما سبق ثم بناءه كنموذج برمجة خطية لحل مشكلة تعظيم الأرباح على النحو التالي:

تعظيم Maximize $Z= 10x_1 + 7x_2 + 5x_3$

تحت القيود Subject to:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1200$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 900$$

$$3x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 1500$$

$$x_1 , \quad x_2 + x_3 \leq 0$$

مثال 2:

مجمع الدواجن بالمنطقة الوسطى يقوم بتغذية 20000 فراخ لمدة 8 أسابيع قبل نقلها إلى السوق. علما بأن تغذية هذه الفراخ يختلف وفقا للعمر والاستهلاك الأسبوعي الذي يبلغ تقريبا 455 غرام.

ولكي يتحقق الوزن المستهدف في الأسبوع الثامن. يجب أن تكون تركيبة الغذاء محتوية على نسبة معينة من البروتين.

المطلوب:

إيجاد الكمية المثالية من خلطة المواد الغذائية المستخدمة لتحقيق الوزن المطلوب وبأقل تكلفة ممكنة، والجدول رقم (2-3) يوضح تركيبة المواد وتكاليفها.

جدول (3-2)

التركيبة	كلسيوم	بروتين	أنسجة	التكلفة $\frac{L.D}{\text{رطل}}$
صخور	0.38	-	-	0.04
فول سوداني	0.001	0.09	0.02	0.015
حبوب	0.002	0.50	0.08	0.40

علما بأن خلطة التركيبة الغذائية يشترك فيها الآتي:

1- نسبة الكالسيوم 0.8% على الأقل ولا تزيد عن 1.2%

2- البروتين 22% على الأقل.

3- البروتين 5% على الأكثر.

الحل:

x_1 = كمية الصخور في الخلطة رطل.

x_2 = كمية الفول السوداني في الخلطة رطل.

x_3 = كمية الحبوب في الخلطة رطل.

باعتبار أن عد الفراخ 20.000، وكل فراخ يحتاج إلى رطل.

رطل $20.000 \text{ x } 1 = 20.000$

رطل $x_1 + x_2 + x_3 = 20.000$

∴ الشرط الأول:

$$0.38\ x_1 + 0.001\ x_2 + 0.002\ x_3 \geq\ 0.008\ )x_1 + x_2 + x_3)$$

$$0.38\ x_1 + 0.001\ x_2 + 0.002\ x_3 \leq\ 0.012\ )x_1 + x_2 + x_3)$$

والتي يمكن كتابتها بصورة أبسط على النحو الآتي:

$$0.372\ x_1 - 0.007\ x_2 - 006\ x_3 \geq 0$$

$$0.368\ x_1 - 0.011\ x_2 - 010\ x_3 \leq 0$$

والدالة الهدف:

$$\text{Minimize} \quad z = 0.04\, x_1 + 0.15\, x_2 + 0.40\, x_3$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20.000$$

$$0.372\, x_1 - 0.007\, x_2 - 0.006\, x_3 \geq 0$$

$$0.368\, x_1 - 0.011\, x_2 - 0.010\, x_3 \geq 0$$

(كالسيوم)

$$0.230\, x_1 - 0.130\, x_2 - 0.280\, x_3 \geq 0 \quad \text{بروتين}$$

$$0.050\, x_1 - 0.030\, x_2 - 0.030\, x_3 \geq 0 \quad \text{أنسجة}$$

$$x_1 \; , \; x_2 \; , \; x_3 \geq 0$$

مثال 3:

قررت إحدى شركات الاستثمارات الداخلية استثمار مبلغ 50,000 د.ل في ثلاثة مشاريع هي بناء عقارات وإدارة مشروع زراعي وتجارة سلع.

وقد قدر عائد أرباحها السنوي بنسبة هي 7%، 9%، 14% على التوالي ومن ضمن مخططات الشركة الاستثمارية:

1- الحصول على العائد السوي بما لا يقل عن 5000 د.ل.

2- توفير 10,000 على الأقل.

3- التفوير من تجارة السلع الداخلية لا يزيد عن التوفير في باقي الاستثمارات.

4- التوفير في بناء العقارات لا يقل عن 5000 د.ل ولا يزيد عن 15,000د.ل.

المطلوب:

كيفية توزيع المبلغ المستثمر 50,000 د.ل في المشاريع الثلاثة بحيث يحقق أكبر استثمار ممكن.

الحل:

نفرض أن:

x_1 = الاستثمار في العقارات د.ل.

x_2 = الاستثمار في إدارة المشروع الزراعي د.ل.

x_3 = الاستثمار في تجارة السلع د.ل

أولا: لتحقيق العائد السنوي من المشاريع الاستثمارية الثلاثة:

$$0.07\, x_1 + 0.09\, _{x2} + 0.14\, x_3 \geq 5000$$

ثانيا: لتحقيق الاستثمار في العقارات

$$x_2 \leq 10{,}000$$

ثالثا: التوفير في تجارة السلع الداخلية لا يزيد عن التوفير في بناء العقارات

$$x_3 \leq x_1 + x_3$$

رابعا: قيود التوفير في العقارات

$$5000 \leq x_1 \leq 15000$$

خامسا: مجموع الاستثمارات لا يزيد عن 50,000 د.ل

$$X_1 + x_2 + x_3 \leq 50{,}000$$

سادسا: شروط الاستثمارات لا تكون سالبة

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

تعظيم Max $z = x_1 + x_2 + x_3$

S.T

$$0.07\,x_1 + 0.09\,_{x2} + 0.14\,x_3 \geq 5000$$

$$x_2 \geq 10,000$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$$

$$x_1 \geq 5000$$

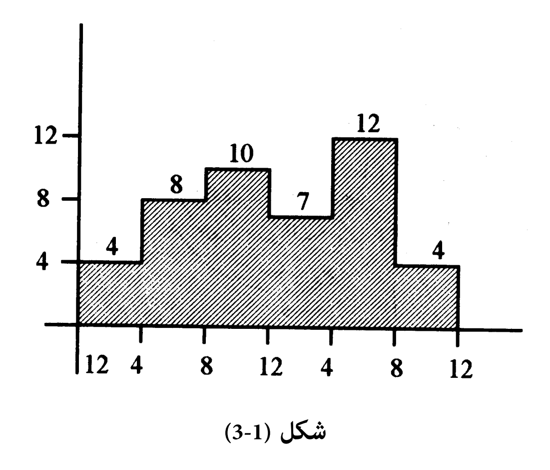
$$x_1 \geq 15000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5000$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \leq 0$$

مثال 4:

قامت شركة النقل الريفي داخل أحدى مدن الجماهيرية الليبية بدراسة لغرض توفير المواصلات داخل المدينة مع مراعاة تقليل وتصغير عدد الحافلات التي تقوم بنقل المواطنين على أن تكون وسيلة النقل متوفرة خلال الأربع وعشرين ساعة. ومن خلال الدراسة الإحصائية التي قامت بها مجموعة من المهندسين أفادت الدراسة بعدد الحافلات اللازمة خلال فترات مختلفة خلال اليوم وقسمت هذه الفترات إلى ست فترات كما موضح بالشكل (1-3).



شكل (1-3)

المطلوب:

احسب عدد الحافلات اللازمة للتشغيل خلال الفترات الست المختلفة والتي تستوعب الطلبية المناسبة وبأقل عدد ممكن من الحافلات.

إذا افترضنا أن:

x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 ، x_6 هو عدد الحافلات اللازمة للتشغيل في بداية كل فترة، أي أن:

x_1 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 12:01

x_2 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 4:01 صباحا

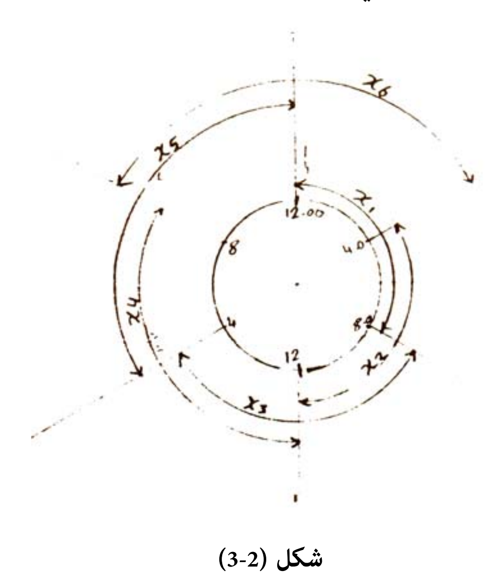
x_3 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 8:01

X_4 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 12:01

X_5 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 4:01

X_6 = عدد الحافلات التي تبدأ العمل الساعة 8:01

ويوضح الشكل رقم (2-3) التداخل الذي يحصل بين الفترات.



شكل (2-3)

∴ عدد الحافلات التي تشتغل خلال كل الفترات وبأقل عدد ممكن هو الهدف

تعظيم Minmize $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$

S.T

$x_1 + x_6 \geq 4$ (12 ← 4 صباحا)

$x_1 + x_2 \geq 8$ (4 ← 8 صباحا)

$x_2 + x_3 \geq 10$ (8.01 ← 12 صباحا)

$x_3 + x_4 \geq 7$ (12 ← 4 مساء)

$x_4 + x_5 \geq 12$ (4 ← 8)

$x_5 + x_6 \geq 4$ (8 ← 12)

$xj \geq 0 \quad J = 1,2,\dots,6$

مثال 5:

تقوم الشركة العربية الليبية للأسمنت بإنتاج كميات كبيرة من الأسمنت من مصانع مختلفة موزعة في كل من سوق الخميس، الخمس، درنة، بنغازي.

ويوزع إنتاج هذه المصانع على مراكز مختلفة للتسويق داخل الجماهيرية الليبية مثال بنغازي - سرت - مصراته - طرابلس - سبها.

فإذا فرضنا مصان الأسمنت M ومراكز التوزيع N

حيث: $i = 1, 2, 3, \dots m$

$j = 1, 2, 3, \dots n$

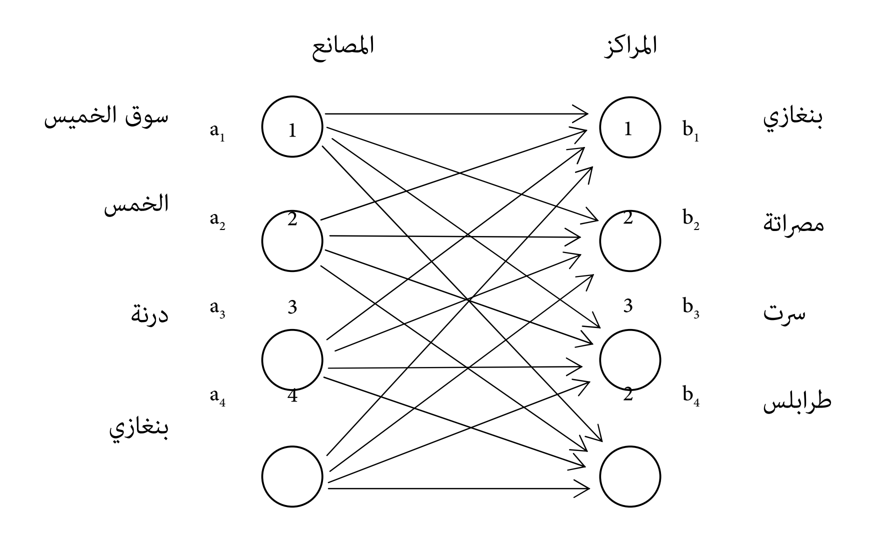
وأن تكلفة وحدة النقل من المصنع إلى المركز التوزيع هي cij

وأن سعر الإنتاج في المصنع i هي ai.

وأن سعر الطلبية في المـركز j هي bj.

المطلوب:

كيفية نقل كميات الأسمنت من المصنع i إلى مركز j بأقل تكلفة ممكنة وتعرف هذه المشكلة باسم مشكلة النقل.



ويمكن صياغة المسألة على نموذج برمجة خطية وذلك على النحو الآتي:

(تصغير) Minimize $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4}$ cij xil

Subject to:

$\sum_{i=1}^{4}$ xij $\leq$ ai I = 1, 2, … 4

$\sum_{j=1}^{4}$ xij = bij = 1,2,… 4

Xij $\geq$ j = 1 - ,4
I = 1 - ,4

مثال 6:

شركة قطاع الورق والطباعة تنتج لفائف من الورق بعرض قدره 50 متر وتختلف طلبيات المطابع لموزعي الأفراد من يوم إلى آخر، ومن هذه الطلبيات المثال الآتي:

العرض (متر)	عدد الطلبيات
10	١٠٠
15	200
٢٥	150
٣٠	150

ونظرا لأن الشركة ترغب في وضع خطة لعملية عرض القطع وفقا للطلبيات المدرجة أعلاه باستخدام العرض المتاح لها وهو 50 متر وفي نفس الوقت تهدف الشركة إلى تصغير الفاقد من الورق.

المطلوب:

استخدام طريقة البرمجة الخطة لحل هذه المشكلة.

الحل:

يتم اختيار المتغيرات التي يمكن اتخاذ القرار بشأنها وذلك بمعرفة عدد المرات التي يجب فيها اختيار نموذج القطع.

∴ النموذج الذي يجب أن يقطع به العرض المطلوب وهو 10، 15، 25، 30 متر. ومن النماذج التي يجب أن تختار مدونة في الجدول (3-3).

جدول (3-3) بعض احتمالات القطع الممكنة

المطلوب	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	5	3	2	2	2	1	0	0	0
15	0	1	2	0	0	1	1	1	0
25	0	0	0	1	0	1	0		٢
30	0	0	0	0	1	0	1	1	٠
الفاقـد	0	5	0	5	0	0	5	5	0

نعرف الآن أن:

xj = عدد مرات استخدام النموذج j لمقابلة الطلبية المطلوبة.

حيث $j = 1 , 2, \dots , 9$

ومن المعروف أنه لا يمكن استخدام رقم غير صحيح من اللغة الواحدة لعملية القطع وبالتالي لابد من الحصول على قيم للمتغيرات بأعداد صحيحة.

فمثلا: بالنظر إلى قطع نموذج عرض 10 متر.

$$5 x_1 + 3 x_2 + 2 x_3 + 2 x_4 + 2 x_5 + x_6 + 0 x_8 + 0 x_9 - x_{10} = 100$$

المتغير x_{10} يعني عدد اللفات ذات النموذج 10 متر وتزيد عن 100 يمكن قطعها وبالتشابه بالنسبة إلى 15 متر، 25 متر، 30 متر.

$$x_2 + 2 x_3 + x_6 + 3 x_7 + x_8 - x_{11} = 200$$

$$x_4 + x_6 + 2 x_9 - x_{12} = 150$$

$$x_5 + x_8 - x_{13} = 50$$

وتعتبر الزيادة للفائق ذات عرض 15، 25، 30 متر ممثلة بالمتغيرات:

x_{11} ، x_{12} ، x_{13} على التوالي.

ولتصغير الفاقد يمكن تمثل دالة الهدف بالتالي:

$$\text{Minimize} \quad z = 5\,x_1 + 5\,x_4 + 5\,x_8 + 10\,x_{10} + 15\,x_{11} + 25\,x_{12} + 30\,x_{13}$$

ويعتبر دخول x_{10} ، x_{11} ، x_{12} ، x_{13} يمثل زيادة لفائق عن الطلبية المستخدمة في عملية القطع.

3.3 مسائل:

1- تنتج شركة س أربعة منتوجات مختلفة على نوعين من الآلات الإنتاجية.

زمن الإنتاج لكل منتج موضحا بالساعة حسب الجدول التالي:

الآلة	الزمن اللازم للمنتج بالساعة			
	منتج 1	منتج 2	منتج 3	منتج 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

علما بأن تكلفة المنتج تعتمد على زمن الإنتاج التي يستغرقه على الآلة.

حيث تكلفة المنتج الواحد على الآلة (1) د.ل و 20 د.ل على الآلة رقم (2). وإن الزمن المتاح لتشغيل آلة (1) هو 500 ساعة، 380 ساعة على الآلة (2)، وثمن بيع المنتوجات على التوالي 56.5 ، 70.0، 55.0 ، 45.0 د.ل. المطلوب صياغة المسألة لتحقيق أكبر ربح ممكن..

2- ينتج مصنع ثلاثة نماذج من منتج ما (I ، II، III) ويستخدم المصنع نوعان من المواد الخام (A، B) علما بأن المتاح من المادة الخام A = 4000 وحدة، ومن المادة الخام B هو 600 وحدة، وتستهلك المواد الخام في كل نموذج على النحو الآتي:

المادة الخام	استهلاك النموذج من وحدات المادة الخام		
	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

يحتاج النموذج الثاني II مرتين من النموذج الأول I والنموذج الثالث III ثلاث مرات من النموذج I بالنسبة لزمن المنتجين.

ينتج المصنع من النموذج I عدد 1500 وحدة، وطلب السوق من النماذج I، II، III على التوالي 200، 200، 150 علما بأن النسبة لعدد المنتوجات I، 11، III تساوي ٣ : 2 : 5 وأن الربح لمنتج واحد من المنتوجات I ، II ، III على التوالي 30 ، 20 ، 50 د.ل.

المطلوب: صياغة المسألة لحلها بالبرمجة الخطية بحيث تحسب عدد المنتوجات المطلوب من I ، II ، III لتحقيق أكبر ربح ممكن.

3- تشاركية تقوم بأعمال الخدمات الهاتفية، قمت بمسح شامل للمواطنين في أحدى المدن الليبية والراغبين في وجود عمل حسب المقابلات الشخصية (بالهاتف أو مباشرة) وذلك على النحو الآتي:

أ - يجب أن يشمل المسح على الأقل 360 مقابلة مباشرة.

ب- يجب أن لا يقل عدد المقابلات عن 500 مقابلة (هاتفيا ومباشرة) في المساء.

ج- يجب أن لا يقل عن 60% من المقابلات بواسطة الهاتف أثناء الدوام الرسمي.

د- يجب أن يشمل مجموع المقابلات 1000 مقابلة (شخصيا أو بالهاتف) علما بأن تكلفة المقابلة الواحدة بالهاتف أو مباشرة أثناء الدوام أو مساء تكون على النحو الآتي:

	مباشرة	بالهاتف
الدوام	2.0 د.ل	1.0 د.ل
مساء	2.4 د.ل	1.20 د.ل

المطلوب: صياغة المسألة لتحقيق المقابلات وبأقل تكلفة ممكنة.

4- مهندس إنتاج يرغب في تخطيط ثلاثة منتوجات على أربع آلات. وكل المنتوجات تمر على جميع الآلات لغرض العمليات الإنتاجية.

تكلفة كل منتج على الآلة حسب المعلومات التالية:

	الآلات			
المنتوجات	**1**	**2**	**3**	**4**
1	4	4	5	7
2	6	V	5	6
3	12	10	8	11

والزمن اللازم بالساعات للإنتاج كل منتج على كل آلة موضح بالجدول التالي:

	الآلات			
المنتوجات	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.30	0.2	0.25
3	0.8	0.60	0.6	0.50

لو فرضنا أن طلبية السوق من المنتوجات 1، 2، 3 هي على التوالي 4000، 5000 ، 3000 وحدة. والزمن المتاح على كل آلة هو 1500، 1200، 1500، 2000 ساعة.

ضع المسألة لحلها بواسطة البرمجة الخطية.

5- تنتج شركة الشاحنات 3 أنواع من المواصلات: حافلة 24 راكب، شاحنة 12 طن، شاحنة 100 طن، والجدول الآتي يوضح بعض المعلومات عن كل نوع من المواصلات.

نوع المواصلات	الربح/ السيارة د.ل	كمية صرف الوقود بالجالون	المبيعات سنويا
حافلة 42 راكب	600	18	600.000
شاحنة 12 طن	400	24	800.000
شاحنة 100 طن	300	36	700.000

وأن تعليمات أمانة المواصلات تسمح بأن يكون استهلاك الوقود 30 ميل/ جالون أو أكثر. وأن كل ميل/ جالون يوفر أقل من 30 يجب أن تدفع الشركة عقوبة قدرها 200 د.ل لكل سيارة تنتجها الشركة. وترغب الشركة أن تعظم ربحا وتقلل من نوع الصرف التي تحت 27 ميل/ الجالون. أكتب المسألة بالبرمجة الخطية.

6- أحدى محطات تقنية وصناعة زيت النفط تنتج ثلاثة أنواع من المستويات (A ، B ، C) من الوقود من ثلاثة منابع من مصادر النفط، أي مادة خام يمكن أن تستخدم للإنتاج أي نوع من المنتوجات وفقا للمواصفات التالية؟

درجة الوقود	المواصفات الفنية	ثمن البيع للجالون د.ل.
A	لا يقل عن 50% من خام I ولا يزيد عن 40% من خام II	2.5
B	لا يقل عن 35% من خام I ولا يزيد عن 45% من خام II	٢,٢٠
C	لا يزيد عن 20% من خام III	١,٨٠

وأن أكبر كمية متوفرة من النفط الخام في الفترة الواحدة وتكلفتها على النحو الآتي:

خام I 10.000 جالون بتكلفة 2.60/ جالون

خام II 9.000 جالون بتكلفة 2.00/ جالون

خام III 3.000 جالون بتكلفة 1.20/ جالون

يهدف مصنع تقطير النفط إلى تعظيم الربح. صغ المسألة بالبرمجة الخطية.

الفصل الرابع

استخدام الطريقة البيانية
في حل نموذج البرمجة الخطية

إن هذا الفصل مكرس لموضوع حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية، حيث جاء الفصل غنيا بالأمثلة التطبيقية على كيفية تمثيل القيود بواسطة الرسم البياني. كما يتضمن الفصل بعض التعريفات ذات العلاقة بطريقة الرسم البياني.

الفصل الرابع

٤

استخدام الطريقة البيانية في حل نموذج البرمجة الخطية

Graphical Solution of Linear Programming

٤,١ مقدمة:

من المتوقع جدا أن القارئ بعد معرفة كيفية صياغة مسائل البرمجة الخطية يكون متشوقا لكيفية حل هذا النوع من النماذج الرياضية. ويجب علينا أن نشير أن الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية لا تصلح لحل المشكلات التي تحتوي على أكثر من ثلاثة متغيرات، ومن المعروف أيضا أن التطبيقات العملية من النادر جدا أن تحتوي على هذا العدد القليل من المتغيرات والتي يمكن اتخاذ القرار فيها بدون هذه الخطوات الرياضية, وأنه من الضروري لفرض التوضيح والتحسس لكيفية حلول مسائل البرمجة الخطية استخدام طريقة الرسم البياني لإشعار القارئ بتقنية حل المسائل بالإضافة إلى التعرف على بعض المفردات المهمة في استخدام حلول المسائل بصفة عامة مهما كان عدد المتغيرات. ولتوضيح طريقة حل المسائل بواسطة الرسم والظواهر المتعلقة بها، نقدم الأمثلة الآتية:

4.2 أمثلة على كيفية تمثيل القيود بواسطة الرسم البياني:

إذا اعتبرنا القيود الآتية:

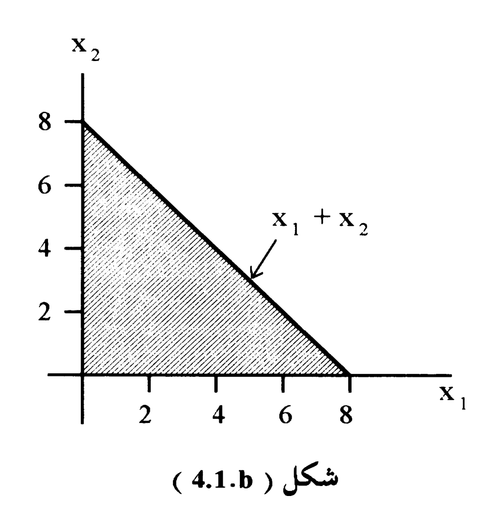
$$3x_1 + 2x_2 = 12 \quad (4.1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 18 \quad (4.2)$$

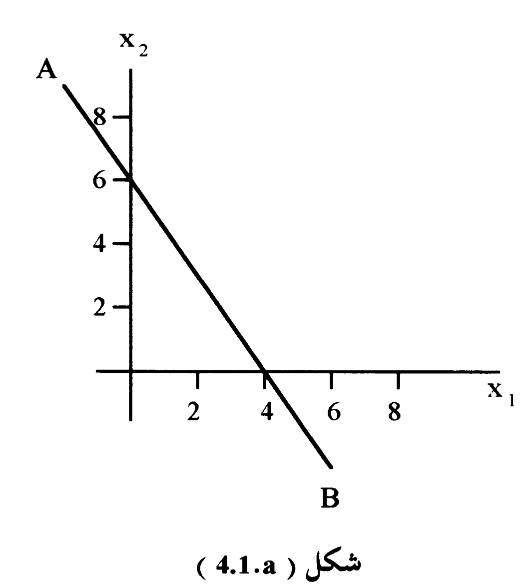
$$4x_1 + x_2 \geq 10 \quad (4.3)$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 12 \quad (4.4)$$

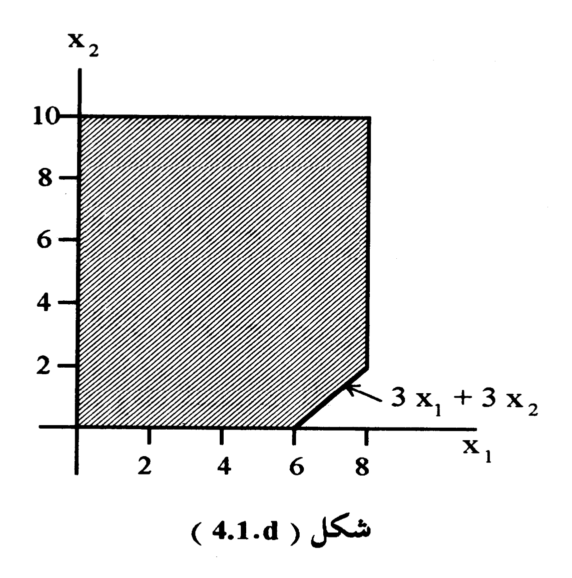
ومن خلال الرقم (4.1) نلاحظ أن القيد (4.1) يرسم على هيئة خط مستقيم كما هو موضح في الشكل (4.1.a) وأن أي نقطة على الخط AB يجب أن تحقق معادلة القيد، وبما أنه من المعروف في شروط مسائل البرمجة الخطة أن كل المتغيرات لها قيمة أكبر من أو تساوي (≤) صفر. عليه يجب اعتبار المساحة التي من $x_1 \geq 0$ ، $x_2 \geq 0$.



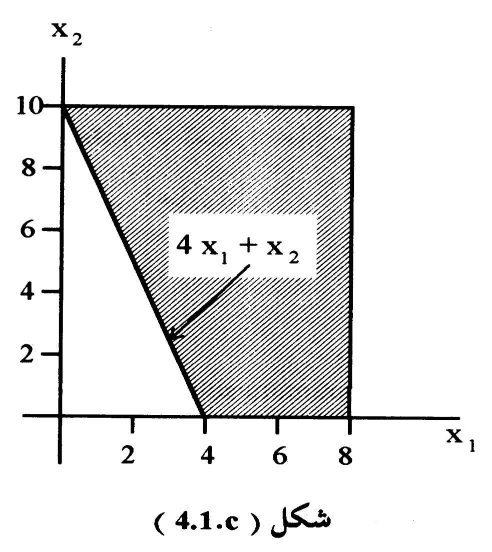
شكل (4.1.b)



شكل (4.1.a)



شكل (4.1.d)



شكل (4.1.c)

نلاحظ أن القيد (4.2) أقل من كما هو موضح بالشكل (4.1.b) والقيد (4.3) أكبر من كما هو موضح بالشكل (4.1.c) أقل من كما هو موضح بالشكل (4.1.d) وأن المساحة المظللة تعني أن أي نقطة على حدودها أو داخلها يجب أن تحقق المعادلة.

إن هذا المثال رسمت فيه كل معادلة على حدة، ولكن عندما يتم رسم المعادلات في شكل واحد سوف تحدد فيها المساحة المشتركة بين المعادلات التي تحقق كل المعادلات في آن واحد ونعرف المساحة المشتركة بـ (Feasible area) وهي المساحة التي يتاح فيها حل المسألة سواء كانت تعظيم أو تصغير.

ويمكن تلخيص الخطوات اللازمة للرسم على النحو الآتي:

1- نعرف محاور المتغيرات وفقا لمسميات المتغيرات (مثل x_1 ، x_2).

2- ارسم معادلات القيود، حقق خط في حالة (=) أو مساحة في حالة (≤) أو (≥) المرافقة لكل قيد.

3- عرف أو حدد المنطقة الممكنة (Feasible area) بين القيود والتي تسمى مساحة الحل والتي أي نقطة فيها تحقق المعادلات وأن أي نقطة خارج هذه المساحة لا تحقق المعادلات تسمى خارج الحل أو (infeasible) بمعنى غير منظورة من وجهة نظر الحل.

4- عرف النقاط الركنية والتي مرشحة أن تكون نقطة الحل الأمثل (optimum).

5- أحسب قيمة الحل الأمثل (optimum solution) وذلك بحساب قيمة دالة الهدف لكل نقطة مرشحة للحل في الخطوة الرابعة. وعليه فإن لنقطة التي تحقق أكبر قيمة ممكنة في حالة التعظيم أو أقل قيمة ممكنة لدالة الهدف في حالة التصغير تعتبر نقطة الحل وأن القيمة المصاحبة لها الدالة الهدف هي الحل الأمثل، وسوف نوضح هذه الخطوات في الأمثل القادمة.

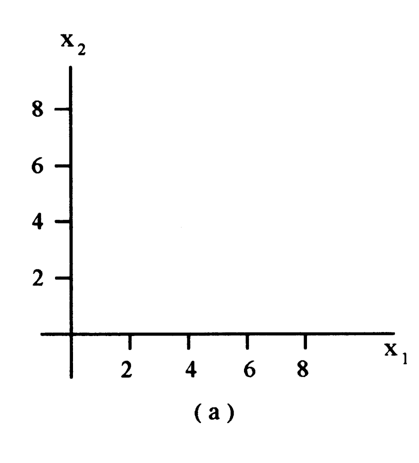
مثال 2:

مسألة تعظيم (Maximization Problem).

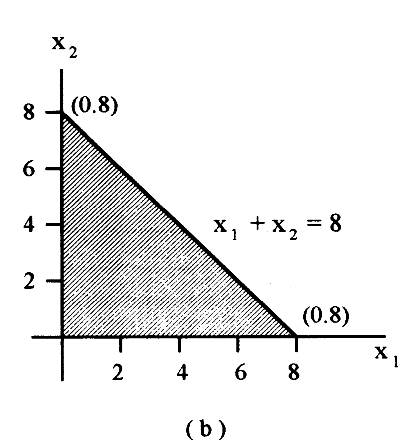
Maximize $z = 5x_1 + 2x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$4x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 8$$

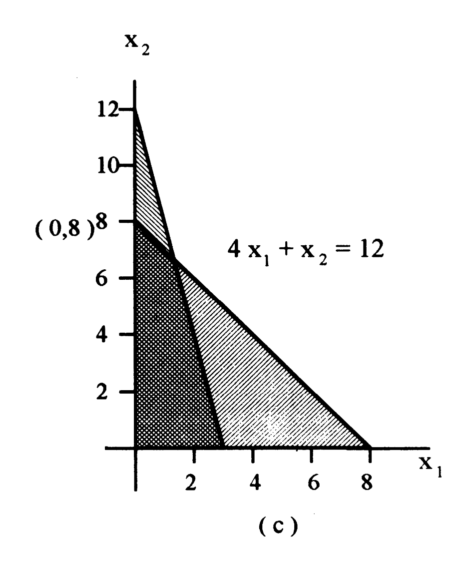
الحل:



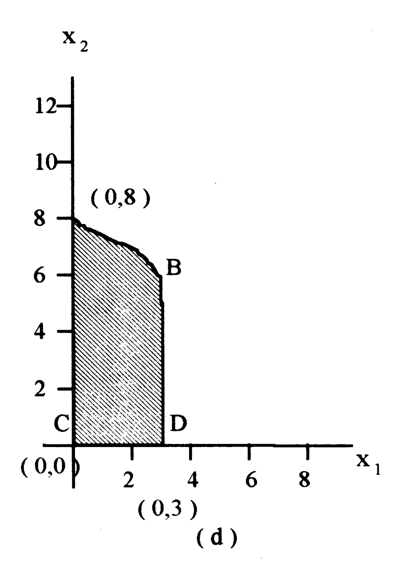
(a)



(b)



(c)



(d)

∴ الواضح من الرسم (d) أن النقاط المشاركة في الحل هي النقاط a ، b ، c ، d ولاختيار الحل الأمثل:

النقاط المساهمة في الحل	إحداثيات النقاط x_1 ، x_2	قيمة دالة الهدف $5x_1 + 2x_2$
A	(0.8)	16
B	$(4/3, 20/3)$	→ 20
C	(0 , 0)	0
D	(3 , 0)	15

∴ الحل $x^* = (\frac{4}{3}, \frac{20}{3})$ ، $z^* = 20$

مثال 3:

مسألة تصغير (Minimization problem)

يتشابه استخدام الطريقة البيانية في حالة مشكلة التصغير مثل تقليل التكاليف (Cost minimization) مع استخدامها في حالة مشكلة التعظيم والفارق الوحيد سوف يكون في خطوة اختيار الحل الأمثل.

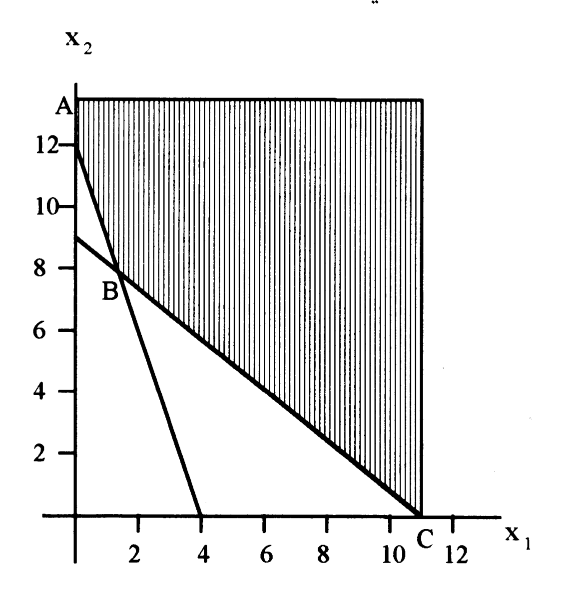
أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

$$\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + 8x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 9$$
$$3x_1 + x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

يمكن رسم القيود على النحو التالي:



وبمعايرة دالة الهدف عند النقاط C, B, A في المساحة غير المغلقة (Unbounded) أو غير محصورة.

A ($x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $z = 96$

B ($x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{15}{2}$, $z = 63$)

C ($x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $z = 18$)

$\therefore\ x^* = (9\ ,\ 0)\ \ z^* = 18$

* يعني النقطة التي يوجد عندها الحل الأمثل.

مثال 4:

مسألة تعظيم ومساحة الحل غير محصورة.

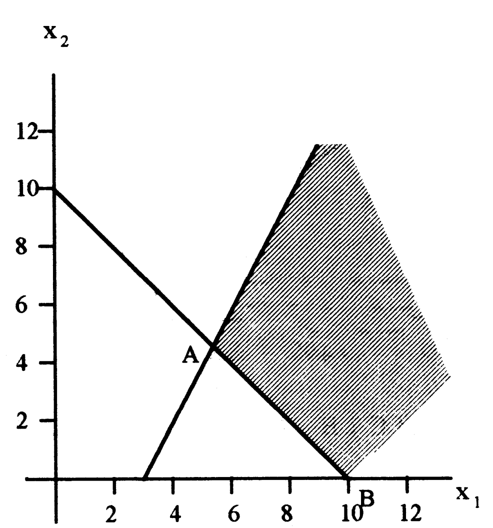
Maximize $z = ٣\, x_1 + ٧\, x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \geq 10$

$4\, x_1 + x_2 \geq 12$

$x_1 , x_2 \geq 0$



$A\ (x_1 = \frac{22}{3}\ , x_2 = \frac{28}{5}\ )$

$B\ (x_1 = 10\ , x_2 = 0)$

$C\ (\ x_1 = \infty\ , x_2 = \infty\ )$

من الواضح أن الحل الأمثل هو أعظم قيمة ممكنة وبالتالي فإن نقطة الحل هي:

$c^*\ (x_1^* = \infty\ , x_2^* = \infty\ , z^* = \infty\ )$

مثال 5:

في حالة وجود أكثر من حل مثالي للمسألة (Alternative optimum solution).

أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

Maximize $z = 10\,x_1 + 6\,x_2$

S.T

$$5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 30$$

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 18$$

$$x_1 ,\ x_2 \geq 0$$

	الإحداثيات	قيمة دالة الهدف
A	(0 , 9)	54
B	$(\frac{6}{7} ، \frac{60}{7})$	→ 60
C	(6 , 0)	→ 60
D	(0 , 0)	0

∴ الحل هو $C^* = (6 ، 0)$ ، $B^* (\frac{6}{7} ، \frac{60}{7})$

$Z^* = ٦٠$

مثال ٦:

القيد المتكرر (Redundant Constraints).

Maximize $z = 6x_1 + 12x_2$

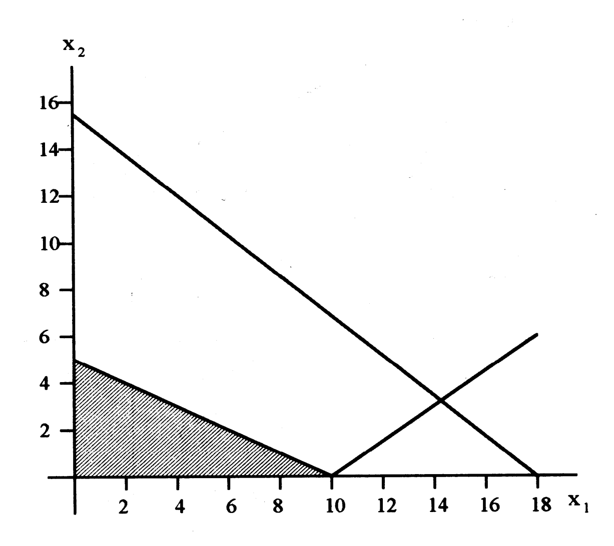
S.T

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$2x_1 + 5x_2 \leq 20$

$x_1 + x_2 \leq 15$

$x_1, x_2 \geq 0$



نلاحظ أن القيد الوحيد الذي يمكن أن يعتمد عليه في الحل هو القيد

$(x_1 = 2x_2 \leq 10)$

وكذلك قيود عدم السلبية

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

أما القيد الثاني والثالث فلا تأثير لها على مساحة الحل.

مثال 7:

المسألة التي يوجد لها أكثر من حل (Alternative optimum solution).

أوجد قيمة x_1 ، x_2 إذا كان

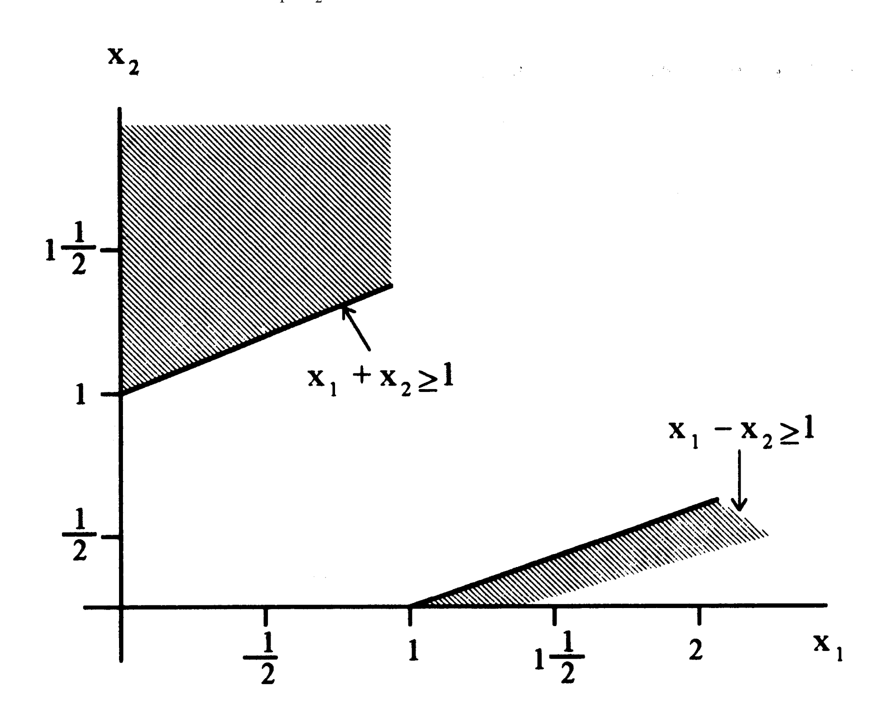
Maximize $z = - x_1 - x_2$

S.T

$x_1 - x_2 \leq 1$

$- x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 , x_2 \geq 0$



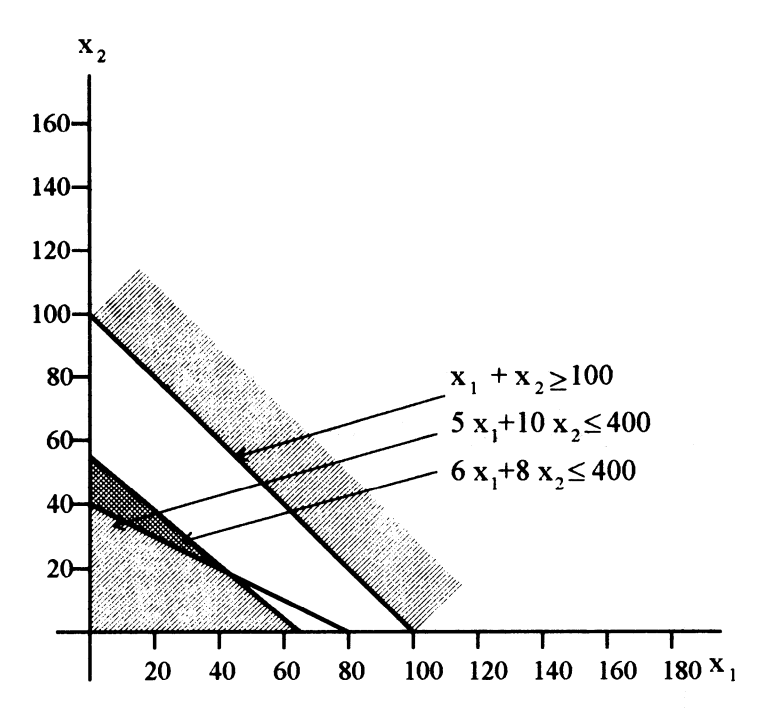
يتضح من الشكل السابق أنه لا توجد مساحة مشتركة بين القيود، وبالتالي لا يوجد حل للمسألة.

مثال ٨: (المسألة التي لا يوجد لها حل)

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 100$$
$$5x_1 + 10x_2 \leq 400$$
$$6x_1 + 8x_2 \leq 440$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



نلاحظ من الرسم أن الثلاثة قيود الموضحة أعلاه لا توجد بينها مساحة مشتركة، بمعنى آخر لا توجد قيمة للمتغير x_1 ، x_2 تحقق كل المعادلات وعليه تسمى هذه المسألة بالمسألة التي ليس لها حل (Infusible problem)

4.3 بعض التعريفات المتعلقة بطريقة الرسم البياني:

1- الحل المنظور (Feasible solution)

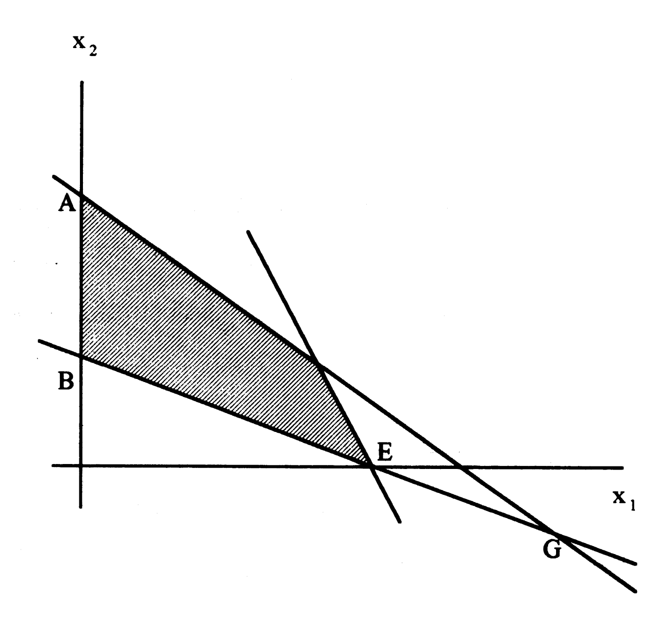
هو الحل للمتغيرات التي تحقق كل المعادلات التي تحضر منطقة العمل وكذلك شروط عدم السلبية.

2- الحل الغير معروف (Infeasible solution):

هو الحل الذي لا يوفر قيم للمتغيرات التي تحقق كل المعادلات (القيود) ولا يحصر مساحة محددة يمكن من خلالها تحديد نقاط الحدود (Boundaries).

3- الحل الابتدائي (Basic solution)

هو أي نقطة تقاطع بين أي معادلتين أو قيدين كما هو موضح بالرسم للنقاط من A إلى G. وتسمى أيضا بـ (الحل الأساسي) في بعض الأدبيات البريطانية الحديثة.



-4 نقاط التقاطع:

يقصد بنقطة التقاطع الحل الابتدائي أو الأساسي.

-5 الحل الأمثل (Optimum solution)

هي القيم المثلى للمتغيرات $x_1 , x_2 , ... x_n$ التي تحقق أكبر قيمة لـ z في حالة التعظيم وأقل قيمة لـ z في حالة التصغير أو التدنية.

4.4 مسائل:

-1 حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 3 x_1 + 2 x_2$

S.T

$2 x_1 + x_2 \leq 2$

$3 x_1 + 4 x_2 \leq 12$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-2 حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 5 x_1 + 2 x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 5$

$x_1 , x_2 \geq 0$

3- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 5x_1 + ٦x_2$

S.T

$x_1 - 2x_2 \geq 2$

$-2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

4- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = 4x_1 + 4x_2$

S.T

$2x_1 + 7x_2 \leq 21$

$7x_1 + 2x_2 \leq 49$

$x_1, x_2 \geq 0$

5- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = ٥x_1 + x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 12$

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1, x_2 \geq 0$

6- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = x_1 + x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

7- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Min $z = 3x_1 + 4x_2$

S.T

$- 3x_1 + x_2 \leq 9$

$- 9x_1 + 12x_2 \leq 21$

$x_1 , x_2 \geq 0$

8- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Min $z = 3x_1 + 2x_2$

S.T

$5x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 + 4x_2 \leq 12$

$x_1 , x_2 \geq 0$

9- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Min $z = 30x_1 + 50x_2$

S.T

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 2x_2 \leq 11$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

$x_1 , x_2 \geq 0$

10- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Min $z = 3x_1 + x_2$

S.T

$5x_1 + 4x_2 \leq 40$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$5x_1 + 12x_2 \leq 60$

$x_1 , x_2 \geq 0$

11- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم

Max $z = x_1 + x_2$

S.T

$-x_1 + x_2 \leq -1$

$x_1 - x_2 \leq -1$

$x_1 , x_2 \geq 0$

12- أجب عن الفقرات التالية:

أ - أذكر عيوب الحل بطريقة الرسم البياني لحل نموذج البرمجة الخطية وشروط تطبيقها.

ب- ما المقصود بخط دالة الهدف لنموذج البرمجة الخطية؟

ج- هل يعتبر كل حل أمثل حل ممكن؟ وهل كل حل ممكن هو حل أمثل؟

د- يختلف الحل الأمثل للمشكلة إذا تغيرت قيود نموج البرمجة الخطية. ناقش ذلك.

هـ- ما الفرق بين المتباينة والمعادلة في قيود البرمجة الخطية؟

13- ضع علامة (✓) و (✗) أمام العبارات التالية:

1- تعتمد دالة الهدف على قيمة المتغيرات. ( )

2- في نموذج البرمجة الخطية إحلال علامة أو ب = في قيود المسألة يمكن تحسين ( ) قيمة دالة الهدف.

3- في نموذج البرمجة الخطية بواسطة القيود يمكن أن يتأثر إذا صادفنا القيد المتكرر. ( )

4- التغير في توفر الطرق الأيمن يؤثر على قيمة دالة الهدف. ( )

5- التغير في معاملات دالة الهدف (الثوابت) يؤثر في قيمة دالة الهدف. ( )

14- حل المسألة الآتية بواسطة طريقة الرسم البياني

Max $z = 6x_1 + 2x_2$

S.T

$x_1 + x_2 \leq 4$

$4x_1 + 3x_2 \leq 12$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

الفصل الخامس

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس

يتنـاول هـذا الفصـل بشيـء مـن التفصـيل المـدعم بالأمثلـة التطبيقيـة، الخطـوات الأساسـية لطريقـة السـمبلكس، مـع تقديم نبذة موجزة عن أهمية هذه الطريقة العلمية في حل الكثير من مسائل البرمجة الخطية.

الفصل الخامس

٥

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس
Simplex Method

5.1 مقدمة:

إن النظرية الأساسية لحل البرمجة الخطية هي نظرية السمبلكس. وتعتمد هذه النظرية على نظرية نقاط التقاطع (Extreme point theory) وتعتمد فكرة السمبلكس على خلفية واسعة من الجبر الخطي ومن المعروف أنه إذا وجد حل لمسألة البرمجة الخطية فإن المساحة التي تكونها معادلات القيود لابد أن تكون دالة مقعرة (Convex function).

لذلك من المفيد استخدام طريقة السمبلكس في تحديد عدد نقط التقاطع التي أحيانا تكون كبيرة جدا في البحث عن الحل الأمثل.

وعلى سبيل المثال فإن مسالة تحتوي على 20 متغير و 10 قيود يمكن أن يكون لها 48.756 نقطة تقاطع وفقا للقاعدة:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

عليه يمكن تلخيص الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس على النحو التالي:

1- البحث أو تحديد نقاط التقاطع بين القيود (النقط الركنة لمنطقة الحل).

2- حساب طريقة الحركة من نقطة لأخرى لتحسين مستوى الحل أو بالأحرى مستوى قيمة دالة الهدف.

3- الاستمرار في النقطة الثانية حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو لا حل.

وتتميز هذه الطريقة بقدرتها على التعامل مع عدد كبير من المتغيرات وباعتمادها على جبر المصفوفات بدلا من الجبر العادي كما يؤدي التتابع في أسلوب الحل إلى الوصول لنتيجة أفضل أو الحل الأمثل.

وبصفة عامة يسهل حل مسائل البرمجة الخطية للمسائل التي تحتوي معادلاتها على () أسهل منها في حالة (=) أو (≥) مع شرط أن يكون الطرق الأيمن (bi) موجبا وفي حالة كونه سالبا يجب ضرب المعادلة في إشارة (-) قبل الشروع في الحل.

5.2 الخطوات الأساسية في تطبيق السمبلكس:

1- تحويل المعادلات من المعادلات غير المتساوية إلى حالة التساوي:

أ- إذا كانت المعادلة على الصورة أقل من كما يلي:

$$a\ x_i \leq b_i \qquad (5.1)$$

يجب أن نقدم متغير جديد إلى الجهة الشمال أسمه Stack variable (s) يرمز له $x_s \leq 0$ ويعاد كتابة المعادلة (5.1) على النحو الآتي:

$$a\ x_i + x_s \leq b_i \qquad (5.2)$$

وقيمة هذا المتغير:

$$x_s + b_i - a\ x_i \qquad (5.3)$$

وعليه تكون قيمة هذا المتغير موجبة في حالة وجود فرق أو صفر في حالة التساوي عند الوصول إلى الحل الأمثل.

ب- إذا كانت المعادلة على صورة أكبر من كما يلي:

$$a_i\ x_i \geq b_i \qquad (5.4)$$

يمكن ضرب المعاجلة في 1- وتتحول على الصورة التالية:

$$- a_s x_i - x_i = b_i \qquad (5.3)$$

وفي هذه الحالة:

$$X_s = a_i x_s - b_i \qquad (5.2)$$

5.3 أمثلة تطبيقية:

مثال 1:

إذا اعتبرنا المعادلتين التاليتين. فأوجد الحل الابتدائي للمتغيرات

$$4 x_1 + x_2 \leq 20 \qquad (4.8)$$

$$x_1 + 4 x_2 \leq 40 \qquad (4.9)$$

إذا أضفنا المتغير الفارق (Slack variable)، فيمكن كتابة المعادلات على النحو الآتي:

$$4 x_1 + x_2 \ \ x_{51} = 20 \qquad (4.10)$$

$$x_1 + 4 x_2 + x_{22} = 40 \qquad (4.11)$$

ويمكن معاملة المعادلات التي تحتوي على أكبر من (≥) بواسطة إضافة المتغير الصناعي الفائض (artificial variable) حيث أن المتغير الصناعي لا توجد له أي قيمة طبيعية أو معنوية والغرض من إضافته الحصول الفوري على حل ابتدائي وبعدها تبدأ طريقة السمبلكس التي سوف توضح فيما بعد:

$\therefore$

$$a x_i \leq b_i \qquad (5.1)$$

يمكن كتابتها على الصورة:

$$a x_i + x_s + x_A = b_i \qquad (5.13)$$

أما في حالة

$$a\ x_i = b_i \qquad (5.14)$$

للحصول على حل ابتدائي وذلك بإضافة المتغير الصناعي فقط:

$$a\ x_i + x_A = b_i \qquad (5.15)$$

والأمثلة الآتية يمكن أن تعطي توضيح أكثر.

مثال 2:

حول المعادلات الآتية إلى صورة جاهزة لاستخدامها للحل بطريقة السمبلكس.

$$4\ x_1 - 2\ x_2 \leq 28$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$4\ x_1 + x_2 = 16$$

الحل:

$$4\ x_1 - 2\ x_2 + x_3 = 28$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 5$$

$$4\ x_1 + x_2 + x_6 = 16$$

طبقا للخطوات السابقة ووفقا للمعادلات فإن الحل الابتدائي:

$$x_3 = 28$$

$$x_5 = 5$$

$$x_6 = 16$$

2- أثر تحويل المعادلات على دالة الهدف:

إن اختيار المتغيرات التي يتخذ عليها القرار يؤثر مباشرة على قيمة دالة الهدف وهذا ينطبق سواء على إضافة (Slack variable) أو المتغير الصناعي (artificial variable)

عليه فإن أي دالة يضاف إليها هذين النوعين من المتغيرات سوف تعاد كتابتها على النحو الآتي:

Maximize $Z = C_i X_i$

Maximize تصبح

Maximize $Z = c_i x_i + c_s x_s + c_A x_A$ (5.16)

نلاحظ أن الجزء $c_i x_i$ هو دالة الهدف الأصلية

أما الجزء $c_s x_s$ هو أثر إضافة على دالة الهدف.

أما الجزء الثالث $c_A x_A$ فهو أثر إضافة المتغير الصناعي على دالة الهدف.

مثال 3:

إذا أعطيت مسألة البرمجة الخطية التالية. المطلوب تغييرها على صيغة قابلة للحل بطريقة السمبلكس.

Min $z = 7 x_1 - 3 x_2 + 5 x_3$

S.T

$x_1 + x_2 + x_3 = \geq 9$

$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 12$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

الحل:

Min $Z = 7 x_1 - 3 x_2 - 5 x_3 + 0 x_{51} - m x_{A1} - 0 x_{52}$

S.T

$x_1 + x_2 - x_{51} + x_A = 9$

$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 + x_{52} = 12$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , x_A , x_{52} \geq 0$

ويمكن صياغة هذه المسألة بصورة أسهل استعمالا

Min $Z = -7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 - m x_5 - 0x_6$

S.T

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 9$

$3x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 = 12$

$x_1, \dots\dots\dots, x_6 \geq 0$

حيث:

$x_4 = x_{51}$

$x_5 = x_A$

$x_6 = x_{52}$

3- بعض التعريفات والرموز المهمة لطريقة السمبلكس:

Maximize $Z = c\,x$

S.T

$A\,x = b$

$x \geq 0$

حيث c مصفوفة الصف الواحد (n x 1)

A مصفوفة m x n

b مصفوفة عمود واحد (1 x m)

مثال 4:

إذا اعتبرنا مسألة البرمجة الخطية التالية حيث:

Slacks x5 , x4

MAX $Z = 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$

S.T

$x_1 + 3\,x_2 - x_5 + x_4 = 12$

$5\,x_1 + 6\,x_2 + x_5 = 24$

$x \geq 0$

هذه المسألة يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$MAX \qquad Z = c\,x$$

S.T

$$A\,x = b$$

$$x \geq 0$$

$$c = [\,5 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0\,]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

أي مصفوفةB تسمى حل ابتدائي إذا حققت حل المعادلة $A\,x = b$ مع الأخذ في الاعتبار أن قيم لـ x ($x \geq 0$) وإذا خالف هذا الشرط يسمى حل غير منظور.

أي أن $x < 0$

∴ الحل الابتدائي لأي مسألة برمجة خطية

$$xB = B^{1-}b$$

حيث x_B

$$x\,B\begin{pmatrix} z_{B_1} \\ z_{B_2} \\ \vdots \\ z_{B_m} \end{pmatrix}$$

مثال 5:

في المثال السابق إذا اخترنا

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_{B1} = -\frac{36}{5}$$

$$x_{B2} = \frac{24}{5}$$

وبما أن $x_{B1} < 0$ B هذا الحل غير منظور

مثال 6:

إذا اخترنا المتغيرات الابتدائية للحل x_4 ، x_5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$xB = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$x_{B1} = x_4 = 12 > 0$

$x_{B2} = x_4 = 24 > 0$

∴ الحل حل ابتدائي ويقابله في دالة الهدف:

$$z = c_B x_B = (0,0)\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 0$$

مثال 7:

Max $\quad z = 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3$

S.T

$x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 = \leq 18$

$3\,x_1 + 2\,x_2 + 12\,x_3 \leq ٥٤$

$x \geq 0$

الحل:

Min $\quad Z = 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 0\,x_4 = 18$

S.T

$3\,x_1 + 2\,x_2 + 12\,x_3 + x_5 = 54$

$x \geq 0$

$$c = [3 \quad 1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

إذا اخترنا المتغيرات x_2 ، x_3 كحل ابتدائي

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$xB = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

بما أن x_{B1} ، x_{B2} (≥ 0)

B قيمة Z المقابلة

$$Z = c_B x_B = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = 9$$

نلاحظ أن العمود aj في المصفوفة A يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$aj = y_{ij} b_i + \dots\dots\dots + y_{mj} bm$$

$$= \sum_{L=1}^{m} y_i \quad , \quad Jb_i$$

$$a_j = By_i$$

$$y_i = B^{-1} a_j$$

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{1,j} \\ y_{i,j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

وأن y_{ij} هو مضروب المصاحب لـ I في العمود B

J ترمز إلى مصفوفة الصف aj فمثلا $y_{3,7}$ ترمز إلى العمود 3b في B و $a7=a_j$

$$Zi = y_{1,j} c_{B,1} + \dots\dots\dots . y_{mi} c_{B,m}$$

$$= c_B y_i$$

$$= c_B y_i$$

∴ بالنظر إلى المثال السابق

$$y_1 = B^{-1}\theta_1$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = c_B y_1 = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

مثال 8:

$$\text{Min} \quad z = -5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.T

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = \leq 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x \geq 0$$

لصياغة القيود ودالة الهدف بحيث يمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس نضيف (Slack) وتحول دالة الهدف من (Min) إلى (Max) بالضرب في (-).

$$\text{Min} \quad Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_4 + 0x_5$$

S.T

$$3x_1 + x_2 + 2x_{51} + x_A \qquad = 7$$

$$x_1 + x_2 \qquad + x_5 = 12$$

$$x \geq 0$$

$$c = \left[5, -2, 3, \quad 0 \quad 0 \qquad \right]$$

الذي يدخل في الحل

وبما أن a3 و a2 و a1 ليست في الحل الابتدائي الأساسي

∴ لابد من حساب y_1 ، y_2 ، y_3 وكذلك

$Z_1 - c_1 , Z_2 - c_2 , Z_3 - c_3$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_j = c_B y_j$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 - c_1 = 0 - 5 = -5$$

$$Z_2 - c_2 = 0 - (-2) = 2$$

$$Z_3 - c_3 = 0 - 3 = -3$$

بما أن المسألة Max فإن احتمال:

$(Z_1\text{-}c_1)$ ، $(Z_3\text{-}c_3)$ كليهما (-ve)

∴ لحساب المتغير الذي يدخل وذلك باستخدام القاعدة التالية

حيث $Y_{ij} > 0$

$$y_{B,x} = \min_i \left\{ \frac{x_{B,1}}{X_{1,j}}, \frac{x_{B-2}}{X_{2,1}} \right\}$$

$$= \min_i \left\{ \frac{7}{3}, \frac{2}{1} \right\} = \frac{7}{3}$$

$y_{B,1} / y_{1,1}$ تقابل $y_{Br} / y_{r,1}$ B

التي تعني أن b_1 يجب أن تخرج عندما r =1

$$\hat{B} = (a_1, a_2) = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B^* = B^{-1} b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{B,1} = x_1 = \frac{7}{3}$$

$$x_{B,2} = x_2 = \frac{2}{3}$$

$$Z' = c_B^{/} x_B = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{35}{3}$$

لحساب هل يمكن

$$Z_2' - c_2' \quad , \quad Z_3' - c_3' \quad , \quad Z_4' - c_4'$$

$$y_2 = B'^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y_z = B'^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y'_4 = B'^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Z'_2 = c'_B y'_2 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{3}$$

$$Z'_3 = c'_B \hat{y}_1 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{10}{3}$$

$$Z'_4 = c'_B y_4 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{3}$$

$$\hat{Z}_2 - c_2 = \frac{5}{3} - (-2) = \frac{11}{3}$$

$$\hat{Z}_3 - c_3 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$$

$$\hat{Z}_4 - c_4 = \frac{5}{3} - 0 = \frac{5}{3}$$

وبما أن كل $z_j - c_j$ موجبة

$\therefore$ هذا الحل هو الحل الأمثل

$$x^* = \left(\frac{7}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{2}{3}\right)$$

$$z^* = -\frac{35}{3}$$

٥,٤ الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس:

1- البحث عن حل ابتدائي موجب ($x B = B^{-1} b\ x \geq 0$).

2- اختبار $(2j - ci) \geq 0$.

أذهب إلى الخطوة رقم (6) وغيره أذهب إلى الرقم (3).

3- أذا لأي $(zj - cj) < 0$ لا يوجد أي عنصر موجب لـ y_1 فإن المسألة ذات حل غير محدود المساحة (Unbounded crece).

4- استخدم القاعدة التالية:

$$\frac{X_{B,r}}{Y_{r,j}} = \min\left(\frac{X_{B,r}}{Y_{r,j}}, y_{ij} > 0\right)$$

5- حقق حل ابتدائي جديد وأوجد قيمة المتغيرات وقيمة دالة الهدف وأرجع إلى الخطوة رقم (2).

6- إذا تحقق الحل وأن أي متغير صناعي مازال في الحل الابتدائي بقيمة موجبة فإن المسألة لا يوجد لها حل، غير يعتبر الحل الأمثل مع ملاحظة أن $zj - cj \leq 0$.

5.5 مسائل:

1- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 4x_1 - 7x_2 + x_3$

S.T

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 12$

$3x_1 + x_2 \leq 18$

$x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

2- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 2x_1 + x_2 - x_3$

S.T

$x_1 + 3x_2 \geq 20$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

3- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 10x_1 + 20x_2$

S.T

$5x_1 + 18x_2 \leq 40$

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

4- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 3x_1 + 2x_3$

S.T

$5x_1 + x_2 \geq 10$

$2x_1 + 2x_2 \leq 12$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

5- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

6- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

7- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

S.T

$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

8- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 30x_1 + 50x_2$

S.T

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 11$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الفصل السادس

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

يأتي هذا الفصل مكملا وداعما للفصل الخامس، حيث يكون التركيز منصبا على الجداول كما كان مناسب لتخزين المعلومات بواسطة طريقة السمبلكس. ومن الطرق المتبعة في هذا المجال والتي يناقشها هذا الفصل طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية. كما يتناول الفصل بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس.

كما يتضمن لفصل دراسة حالة في صلب الموضوع.

الفصل السادس



طرق حل مسائل البرمجة الخطية

بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

The Simplex Method Tableau and Computation

6.1 مقدمة:

تعتبر الجداول المعدة لاستخدامها في حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس كمكان مناسب لتخزين المعلومات بطريقة مناسبة بغض النظر عن نوع المعلومات. وهذه المعلومات تشمل:

1- دالة الهدف $z = C_B x_B$

2- الحل الابتدائي الأساسي $x_B = B^{-1} b$

3- مصفوفة الإتاحية $B = (b_1, b_2 \ldots.., b_m$

4- معامل المتغير $y_1 = B^{-1} \theta_j$

حيث $z_j - C_B y_j$

فرق التغير في $z_j - C_j$ الذي بناء عليه يمكن اتخاذ القرار على أن الحل أمثل أو ذو مساحة غير محدودة أو لا يوجد إمكانية حل.

وبناء على هذه المعلومات يمكن تلخيص الجدول على النحو التالي:

(6-1) الجدول العام لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة السمبلكس

معامل المتغيرات التي تدخله في الحل	المتغيرات الأساسية في حكم الحل	المتغيرات				قيمة الحل الابتدائي للمتغيرات
		X_1	X_2	………..	x_n	
C_{B1}	x_{B1}	$y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	……….	$Y_{1,n}$	X_{B1}
:	:	:	:			:
C_{Bm}	x_{Bm}	$Y_{m,1}$	$Y_{m,2}$	………..	$Y_{m,n}$	X_{Bm}
		$Z_{١}-c_{١}$	$Z_{٢}-c_{٢}$	………..	Z_n-c_n	z

(6-2) الجدول العام بالرموز

	Basic Value	C_1	C_2	………..	C_B	
C_{B1}	x_{B1}	y_{11}	Y_{12}	……….	Y_{1n}	X_{B1}
:	:	:	:			:
C_{Bm}	x_{Bm}	Y_{m1}	Y_{m2}	………..	Y_{mn}	X_{Bm}
		$Z_{١}-c_{١}$	$Z_{٢}-c_{٢}$	………..	Z_n-c_n	z

مثال 6.1:

إذا أعطيت المعلومات التالية أوجد الحل الابتدائي للمسألة:

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

S.T

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Max $Z = ٦ x_1 + 8 x_2 + 0 x_3 + 0 x_4$

S.T

$4 x_1 + x_2 + x_3 = 20$

$x_1 + 4 x_2 + x_4 = 40$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

C	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z =	-6	-8	0	0	0
x_3	4	1	1	0	20
x_4	1	4	0	1	4

$(\frac{20}{1}, \frac{4}{4})$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$y_1 = B^{-1} aj = I^{-1} a_j = I a_j = a_j$ ϒ s

$x_1 = B^{-1} b = I^{-1} b = Ib = b$

$z = C_B x_B = (0 . 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 0$

$Z_j = C_B y_j - C_j$

$z_1 = C_1 = 0 - 6 = - 6$

$z_2 = C_2 = 0 - 8 = - 8$

$z_3 = C_3 = 0 - 0 = 0$

$z_4 = C_4 = 0 - 0 = -0$

6.2 حل مسألة البرمجة الخطية بطريقة جداول السمبلكس:

عند كل محاولة تقوم عملية حل المعادلات الخطية الآتية بطريقة السمبلكس

$$B\ x_B = b$$

$$W\ B = C_B$$

$$B\ y = a$$

التي تكون مكونة لنظام البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min} \quad z$$

$$\text{Subject to:} \quad z - C_B\ x_B - C_n\ x_n = 0 \qquad (6.1)$$

$$B\ x_B + N\ x = b \qquad (6.2)$$

$$x_B \ ,\ x_n \geq 0$$

من المعادلة 6.1

$$X_B + B^{-1}\ N\ X_n = B^{-1}b$$

بضرب المعادلة (6.3) في CB وإضافتها إلى المعادلة (6.1)

$$z + 0\ x_B + (C_B\ B^{-1}\ N - C_N)\ x_n = C_B\ B^{-1}b$$

إذا كانت حاليا $x_n = 0$

وفق المعادلتين (6.3) ، (6.4)

نحصل على

$$x_B = B^{-1}b$$

$$z = C_B\ B^{-1}b$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات في صورة جدول على النحو الآتي:

		z	X_B	X_N	الطرف الأيمن
صف 0	Z	1	0	$C_B\ B^{-1}\ N - C_N$	$C_B\ B^{-1}b$
صف ١ إلى m	X_B	0	1	$B^{-1}\ N$	$B^{-1}b$

من الصف صفر نلاحظ هل الحل هو الحل الأمثل بشرط أن ($z_j C_j \leq 0$)

وغير ذلك أن المتغيرات غير الأساسية في الحل تدخل الحل إلى حين الوصول للحل الأمثل.

وفي حالة أن $0 \leq (z_j - C_j)$ و $0 \geq \Upsilon k$ فإن الحل يكون غير محدود المساحة (Unbounded area)

ويمكن تحديد المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية (التي لها حل) وتحديد المتغير الذي يدخل في الحل وبالتالي يسمى متغير أساسي (تم شرحه مسبقا).

6.3 الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس:

أ - **الخطوة الابتدائية:** وذلك بإيجاد الحل الابتدائي على النحو التالي:

	z	X_B	X_B	الطرف الأيمن
Z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B b'$
X_B	0	1	$B^{-1} N$	b'

ب - **الخطوة الأساسية:** إذا افترضنا أن

$$z_k - C_k = \text{Max} \{ z - c_j \ j \ E \ R\} \ z_k - C_k \leq 0$$

توقف ويعتبر الحل وهو الحل الأمثل (تصغير) إذا لم يتوفر الشرط المذكور أعلاه اختر y_k توقف، فإن الحل هو الأمثل لمساحة غير محدودة خلال الاتجاه.

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : xk \geq 0 \right\}$$

حيث c_k مصفوفة الصف الواحد وتحتوي على كل صفر ما عدا عند موقع محدد K. إذا $y_k > 0$ أحسب الموقع Υ

$$\frac{b_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{rk} \geq 0 \right\}$$

واستمر إلى الخطوات التكرارية حتى الحل الأمثل أو غيره.

مثال 6.2

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

بإضافة (Slack) المتغيرات التي تحصل على إشارة التساوي

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0x_6$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

وبما أن كل $b \geq 0$ إذا يمكن اختيار المتغيرات الأساسية التي نبدأ بها الحل

$B = [x_4 , x_5 , x_6]$

محاولة رقم 1

		x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	1	0	0	9
← x_5	1	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	-1	1	1	1	0	0	1	4

إذا نظرنا إلى الصف صفر (0) نلاحظ وجود قيمة موجبة واحدة مناظرة إلى x_3 وبالتالي بقيمة $z_3 - C_1 \geq$ وهذا يحدد دخول x_3 إلى الحل وتصبح من المتغيرات الأساسية لتحسين الوصول إلى الحل الأمثل.

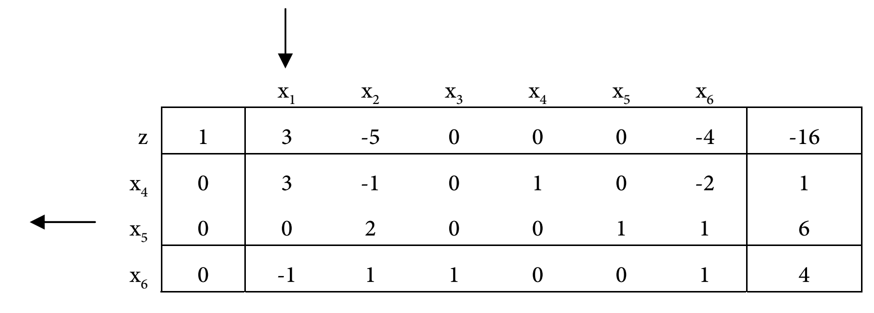
ويمكن تحديد (x) التي تخرج من الحل الأساسي من ضمن (x_4 , x_5 , x_0) وذك باستخدام القاعدة بقسمة العمود (الطرق اليمين) على العمود الذي تم اختياره ونختار أقل قيمة موجبة.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{2}{-1}, \frac{4}{1}\right)$$

$$= (4.5 , -2 , 4)$$

$\therefore$ أقل قيمة موجبة هي 4 المقابلة لـ x_6

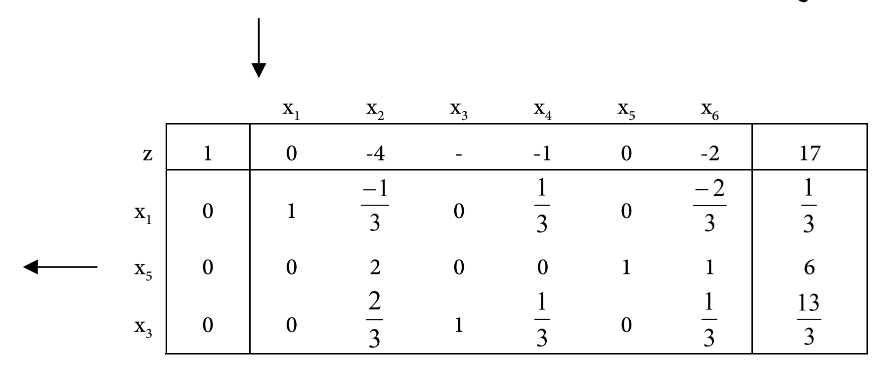
عليه يجب أن تخرج x_6 وتدخل x_3 وتصبح **المحاولة الثانية** على الشكل الآتي:



		x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
← x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

بالنظر إلى الصف 0 مازالت توجد قيمة موجبة $(Z_J - C_J)$ مقابلة إلى x_j (3) وتطبق نفس الخطوات للمحاولة الثالثة.

المحاولة الثالثة:



		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	0	-4	-	-1	0	-2	17
x_1	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

وبما أن كل $z_j - C_j \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية.

∴ الحل هو الأمثل وقيم الحل هي:

$x_1 = \frac{1}{3}$ $\quad x_3 = \frac{13}{3}$ $\quad x_5 = 0$

$x_2 = 0$ $\quad x_4 = 0$ $\quad x_6 = 0$

$z = -17$

6.4 طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية (Big M)

لقد شرحنا سابقا أسباب إضافة المتغير الصناعي (Artificial variable) وذلك لإنشاء الحل الابتدائي لمسائل البرمجة الخطية بالإضافة إلى أن وجود هذا المتغير بقيمة موجبة تعني أن الحل الحالي ليس حلا ملموسا لأي مسألة ويمكن التخلص من المتغير الصناعي وذلك بإضافة إلى دالة الهدف بموافق ذو قيمة كبيرة جدا وغير مشجعة، كمتغير في القيود وتصبح بذلك إمكانية التخلص منه سريعة جدا.

ولتوضيح هذه الظاهرة مع شرط أن $b \geq 0$

$$\text{Min} \quad z = C_x$$

S.T

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

بإضافة المتغير الصناعي في حالة التساوي

$$Ax + x_a = b$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

إن بداية المتغيرات الأساسية للحل يمكن أن تعطي على هيئة:

$$x_a = b$$

ودالة الهدف طورت بطريقة الطرد المتغير الصناعي وذلك بإضافة قيمة كبيرة خيالية لمعاقبة وجود المتغير الصناعي في الحل وبالتحديد يسمى (M) وعليه يعاد صياغة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad z = C_x + mix_a$$

S.T

$$Ax + x_a = b$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حيث M قيمة موجبة كبيرة جدا، والصفر Mixa يمكن تعليله كعقوبة يدفعها الحل الذي يحتوي على $x_a \neq 0$ بالرغم من أن $x = 0$ ، $x_a = b$ كبداية للحل فقط وبإضافة M الكبيرة تسعى طريقة السمبلكس وحدها لإزالة x_a (المتغير أو المتغيرات الصناعية).

ولتوضيح هذه الطريقة نقدم المثال التالي:

$$\text{Min} \quad z = x_1 + 2x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

أولا: يجب إضافة slacks x_3, x_4, x_5 ومتغيرات صناعية x_6 ، x_7 وتصبح المسألة على الصيغة التالية:

$$\text{Max} \quad Z = x_1 - 2x_2 - 0x_3 - 0x_4 + 2x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 2$$
$$-x_1 + 4x_2 - x_4 + x_7 = 1$$
$$x_2 + x_5 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

ويمكن كتابتها في جداول السمبلكس على النحو التالي:

		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
	Z	1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
لا يوجد		0	1	1	-1	0	0	0	0	2
		0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
		0	0	1	0	0	1	1	0	3

بضرب الصف رقم (1) والصف رقم (2) وجمعها على الصف صفر

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-1	2+2M	-M	-M	0	0	0	2
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	1
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	3
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	

بالنظر في صف 0 $z_j - C_j \geq 0$ بالنسبة x_2 وعليه نختار x_2 للدخول في الحل الأساسي وتخرج x_7 وفق القاعدة:

$$\left(\frac{2}{1} , \frac{1}{1} , \frac{3}{1} \right)$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	1	1+2M	0	-M	2+M	0	0	2-2M	-2+M
x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-\frac{2}{3}-M$	$-\frac{2}{5}$
x_6	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_7	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

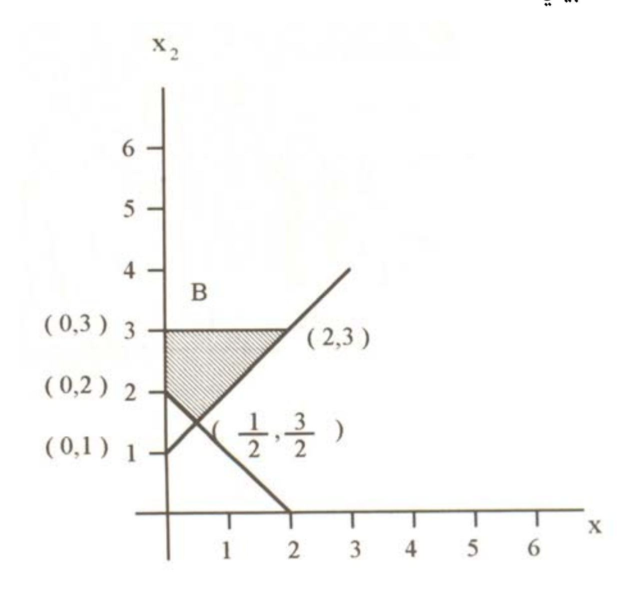
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-3	0	2	0	0	-2-M	M	-4
x_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-1	0	0	0	-2	-M	-M	-6
x_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

بما أن كل $z_j - C_j \geq 0$ كل متغير لا يوجد في الحل الأساسي

∴ آخر جدول تعتبر الحل الأمثل (Optimum)

ويوضح الرسم الحل البياني للمسألة.



مثال 6.3:

(في حالة عدم وجود حل متاح للمسألة (Infeasible solution)

Min $z = -x_1 - 3x_2 + x_3$

S.T

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4$$
$$-x_1 + x_3 \geq 4$$
$$x_3 \geq 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	الطرف الأيمن
1	1	3	-1	0	0	0	-M	-M	0
0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
0	-1	0	1	-1	-1	0	1	0	4
0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

بضرب الصف 2 و 3 في M وإضافتهما إلى الصف 0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_8	الطرف الأيمن
z	1	1-M	3	-1+2M	0	-M	-M	0	0	7M
← x_4	0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
X_7	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_8	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

بالنظر في الصف 0 نلاحظ وجود قيم لغير المتغيرات الأساسية.

مثال x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 أن $(z_j - C_j \geq 0)$ وبالتالي باختيار أكبر قيمة موجبة لتقرير المتغير الذي يدخل الحل وباستخدام القاعدة بقسمة $\frac{b}{x_r}$ حيث r العمود المختار.

$$(\frac{4}{2}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}) \Rightarrow (2, 4, 3)$$

وباعتبار 2 أل قيمة موجبة عليه تدخل x_3 وتخرج x_4.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	الطرف الأيمن
z	1	$\frac{3}{2}$ -2M	$\frac{7}{2}$ -M	0	$\frac{1}{2}$ -M	-M	-M	0	0	2+3M
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	2
x_7	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	2
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	1

بما أن M قيمة موجبة وكبيرة جدا وأن $z_j - C_j \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية في الحل، عليه فإن شروط الحصول على الحل الأمثل قد تحققت؛ ولكن بما أن المتغيرات الصناعية x_7 ، x_8 موجودة بالحل وعند قيم موجبة عالية وفقا للقاعدة فإن الحل خيالي وغير موجود.

مثال 6.4 الحل موجود ولكن غير محدود المساحة:

(Unbounded optimal solution)

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - 3x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

بإضافة متغيرات صناعية للتساوي حسب القاعدة هما x_5 ، x_6 وبالتالي يعاد كتابة المسألة على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - x_2 + M x_5 + M x_6$$

S.T

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

ويمكن نقل المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

↓ (x_3)

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	2	-1	0	1	1

يضرب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف صفر

	z	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	1	1	M	-M	0	0	2M
x_5	0	-1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	1	2	2	-1	0	1	1

	z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	$1+\frac{1}{2}M$	$1-\frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	$-\frac{2}{5}$
← x_5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	0	2	0	1	-M-2	-M-1	-3
X_1	0	1	0	0	-1	2	1	3
x_5	0	0	1	1	-1	1	1	2

ونلاحظ أن $z_j - C_j \geq 0$ المقابلة لـ x_2 قيمة موجبة لكم $x_2 \leq 0$ عليه فإن المسألة ذات حل محدود ولأن المتغيرات الصناعية x_5 ، x_6 آلت إلى الصفر.

مثال 6.5:

Min $\quad Z = -x_1 - 3x_2$

S.T

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

Min $Z = x_1 - x_2 + M x_5 + 0 x_6 + 0 x_4$

S.T

$x_1 + x_2 + 2 x_3 - x_4 + x_5 = 4$

$x_1 - 2 x_2 + x_3 + x_6 = 2$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 \geq 0$

عليه يمكن كتابة المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1	1	-1	0	M	0	0
x_5	1	1	2	-1	1	0	4
x_6	1	-2	1	0	0	0	2

يضر ب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف (0)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1-M	1-m	-2M-1	-M	0	0	٤-M
x_5	1	1	2	-1	1	0	٤
x_6	1	-2	1	0	0	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	M	-6M-1	0	M	0	2M+1	2
x_5	-1	5	0	-1	1	-2	0
$x_٣$	1	-2	0	0	0	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	٢
x_5	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

بما أن $y_{12} \leq 0$ والمتغيرات الصناعية كلها آلات إلى الصفر، فإن الحل ذ مساحة غير محدودة. وتوجد قيمة موجبة $z_j - C_j \leq 0$ مقابلة x_4.

مثال 6.6

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - x_2$$

S.T

$$x_1 - x_2 \geq 1$$
$$-x_1 + x_2 \geq$$
$$x_1 , x_2 \quad ?$$

بإضافة Slack x_3 , x_4 وإضافة المتغيرات الصناعية x_5 ، x_6 للوصول إلى حالة التساوي وبالتالي يمكن كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - x_2 - 0\,x_4 + M\,x_5 + M\,x_6$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	١
0	-1	1	0	-1	0	0	1

يضر ب الصف الأول والصف الثاني في M وإضافتها إلى الصف صفر.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	1	1	-M	-M	0	0	2M
x_5	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	-1	1	0	-1	0	1	2

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z		0	2	1-M	-M	-1	0	2M-1
x_1	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	0	0	-1	-1	1	1	2

نلاحظ أن الصف صفر الذي يحتوي على $z_j - C_j$ توجد قيم المتغيرات الغير داخلة في أكبر من الصفر (٠ ≤) ولا يمكن إدخال أي متغير آخر لتحسين الحل نظرا لعدم إمكانية تحسين الحل وفق القاعدة ($\frac{2}{5}$, $\frac{1}{-1}$) لا يجوز اختيار أحد العناصر ويدل على عدم توفر حل يحقق هذه المسألة.

6.5 بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس:

1- المتغيرات الغير محددة المدى $(-\infty < x < +\infty)$ (Unrestricted variables)

من خلال فصول هذا الكتاب نلاحظ أن المتغيرات التي تم التعامل معها كلها ذات خاصة أن $x \geq 0$.

وبالرغم من ذلك نواجه أحيانا بعض المتغيرات التي حدودها من $-\infty$ إلى $+\infty$.

مثال أن:

$$-\infty < x3 < +\infty$$

ويمكن تحويرها إلى الشكل التالي:

وتستبدل $x3 = x_3^- - x_3^-$

$$x_3^+ \geq 0$$

$$x_3^- \geq 0$$

ونعامل x_3^+ إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي $x_3^+ \; 0 \geq$ وتعامل x_3 إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي على النمو $0 \leq x_3$

2- تكرار القيد (Redundant constraint)

يقصد بتكرار القيد الذي نادرا ما يحصل في صياغة المسائل وجود القيد الذي لا يؤثر في طبيعة الحل.

3- الانحراف (Degeneracy)

يقصد بالانحراف عندما يوجد متغيرا أساسي واحد أو أكثر يكون له قيمة صفر، وتشكل هذه الظاهرة ما يلي:

أ - عدم التحسن في دالة الهدف عندما يتحرك الحل من نقطة إلى أخرى كما هو الحال بواسطة الرسم أو الجداول.

ب- من الممكن أن تنتقل من نقطة إلى أخرى في دائرة لا يمكن التحسن فيها أبدا في دالة الهدف للوصول إلى الحل الأمثل.

6.6 دراسة حالة Case study

تم اختيار مصنع الورق المقوى بالزهراء كحالة للدارسة وتطبيق الأسلوب الرياضي لما يميز هذا المصنع عن المصانع الأخرى لكونه يعتمد على الإنتاج حسب الطلب ولا يوجد لديه إنتاج مصمم مسبقا وبالتالي كان تطبيق الأسلوب الرياضي عليه ممكنا ويمكن الاستفادة من نتائجه بغرض تطبيقه في تصميم عمليات الإنتاج.

مقدمة عن المصنع:

يعتبر مصنع الورق المقوى (الكرتون) من إحدى القلاع الصناعية بالجماهيرية العظمى.

يقع هذا المصنع بمنطقة الزهراء وقد أقيم على مساحة إجمالية وقدرها (15.000) متر مربع منها (17.000) متر مربع مباني إنتاجية وخدمية.

تبلغ الطاقة الإنتاجية للمصنع (15.000) طن في السنة أي ما يعادل (27) مليون متر مربع من (الكرتون) المسطح على أساس وردية واحدة في اليوم وقد تم إضافة وردية ثانية لزيادة القدرة الإنتاجية.

ويهدف هذا المشروع لتغطية احتياجات المصانع والشركات والمشاريع الزراعية والتشاركيات والأفراد بصناديق الكرتون لتغليف وتعبئة مختلف المنتجات المحلية.

وبقدر العدد الإجمالي للعاملين في المصنع بالورديتين 186 منتج، يوجد بالمصنع تسعة خطوط إنتاجية يمر المنتج بثلاث مراحل حتى ظهوره بالشكل النهائي؛ والمراحل هي:

1- مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة تقويم الورق وذلك بلصق ثلاثة طبقات من الورق مع بعضها تكون الطبقة الوسطى بشكل متعرج وهي التي تجعل الورق ذو متانة وقوة عالية.

2- مرحلة التفصيل وهي المرحلة التي تلي مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة إجراء عمليات شق (Slit) للورق بهدف الحصول على المقاسات المطلوبة وتتم عملية الشق باستخدام آلات شق خاصة بالورق وتتميز هذه الآلات بالدقة وإمكانية شق أي مقاس مطلوب.

يظهر الفاقد الناتج عن التوزيع (Layout) في هذه المرحلة حيث يتم استخلاصه وسحبه بواسطة الآلات خاصة يتم بعد ذلك تجميعه والتصرف فيه أيضا يتم في نفس المرحلة قص المنتج وتفصيله ليكون جاهزا للعملية التالية.

3- مرحلة اللصق والطباعة في هذه المرحلة يتم طباعة البيانات المطلوبة على الورق وبعدها يتم لصقه ليكون في شكله النهائي.

يعتمد المصنع في إنتاجيه على الطلب الوارد من الشركات والمصانع والتشاركيات والأفراد ويختلف الطلب الوارد من شركة إلى أخرى أو من مصنع إلى آخر من حيث الكمية والنوع. يعتبر طلب المصنع الواحد أو الشركة الواحدة شبه ثابت من حيث النوع وتختلف الكمية المطلوبة من فترة إلى أخرى، وتعتبر هذه ميزة تستفيد منها إدارة الإنتاج في تخطيط عملياتها الإنتاجية حيث يتم تخزين كمية من الإنتاج الفائض لطلب معين (أي لا يمكن اعتباره فاقد) ويتم استخدامه عند وصول طلب آخر لنفس النوع ويترتب عن تخزين الفائض تكاليف تخزين ولكنها عموما أقل من تكاليف اعتبار الفائض الفاقد.

وبخبرة إدارة الإنتاج نستطيع أن نتوقع أن المصانع والشركات تكون في حاجة إلى منتجات، وبالتالي تقوم إدارة الإنتاج بتصميم العمليات الإنتاجية للطلبيات المتوقعة،

وبذلك يستمر الإنتاج ولا يتحمل المصنع تكاليف إضافية نتيجة لتوقف العمليات الإنتاجية.

يستخدم المصنع أربعة أبعاد قياسية للمواد الخام والتي هي عبارة عن لفائف ورقية وهذه الأبعاد هي (210 ، 220، 230 ، 240) سنتيمتر ويعتبر توفر هذه الأبعاد القياسية ميزة أخرى تستفيد منها إدارة الإنتاج في تقليل الفاقد عند التصميم لتوزيع المنتجات (Layout) على اللفائف حيث يتم استخدام البعد القياسي الأمثل أي الذي يحقق أقل كمية مفقودة.

دراسة تحليل طلب معين:

يختلف الطلب الوارد إلى المصنع ويتفاوت من يوم إلى آخر، لذلك سوف تختار عينة عشوائية لطلبية واردة في يوم 8-5-1994م وكانت الطلبية واردة من شركة الصابون ومواد التنظيف وتحتوي على ثلاثة أصناف كالتالي:

- الصنف الأول عدد الطلبية 52088 وحدة.
- الصنف الثاني عدد الطلبية 1245 وحدة.
- الصنف الثالث عدد الطلبية 28490 وحدة.

وكانت أبعاد الطلبيات محدودة لكل وحدة على النحو التالي:

	الطول (mm)	العرض (mm)
الصنف الأول	931	508
الصنف الثاني	1017	328
الصنف الثالث	1397	60

أما عرض اللفائف القياسية المتوفرة بالمصنع هي (210 ، 220، 230 ، 240) وجميع هذه اللفائف كانت بطول قياسي (260 متر) وبمعلومية الطول القياسي للفائق والطول الإجمالي للوحدات يمكن تحديد عدد اللفائف المطلوبة من كل صنف.

1- الصنف الأول كانت الكمية (52088) وحدة وطول الوحدة (0.931) متر.

الطول الكلي المطلوب الأول = (0.931) (52088) = 48493.92 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الأول = (48493.92) ÷ (260) = 186.51 = 187

2- الصنف الثاني كانت الكمية (1245) وحدة وطول الوحدة (1.017) متر.

الطول الكلي للصنف الثاني= (1.017) (1245) = 1266.16 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثاني = (1266.16) ÷ (260) = 4.86

3- الصنف الثالث كانت الكمية (28490) وحدة وطول الوحدة (1.397) متر.

الطول الكلي للصنف الثالث= (28490) (1.397) = 39798.3 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثالث = (3978.3) ÷ (260) = 153

طريقة الحل لدراسة الحالة بالأسلوب التقليدي:

بعد أن تم تحديد المعالم الرئيسية للحالة بصورة واضحة يتم إيجاد الحل المناسب لها وفق الخطوات المتبعة. وبذلك يمكن صياغة الطلب كالآتي:

الصنف	العرض (m)	عدد اللفائف
1	0.51 = 0.508	187
2	0.33 = 0.328	5
3	0.60	153

وبما أنه يوجد بالمصنع أربعة قياسات فإنه سوف يصاغ النموذج لكل بعد قياسي على فرض أنه لا يوجد لدى الشركة إلا بعد قياسي واحد، كذلك يمكن المفاضلة في اختيار البعد القياسي الأمثل لإنتاج الطلبية فيما لو توفرت الأبعاد القياسية الأربعة.

1- البعد القياسي الأول (عرض 2.100 متر) بطول (260 متر)

يتم أولا تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم وهي كالآتي:

وقد تم استخدام برنامج حاسب آلي لحساب عدد التقسيمات (Settings) المنطقية التي تحقق أقل كمية فاقد وهذا البرنامج موجود بالملحق (1) والجدول التالي يوضح تجميع البيانات للتقسيمات الممكنة.

العدد المطلوب	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	0	4	2	1	4	1	6	3	0	1	3	33
153	3	0	2	0	1	1	0	0	0	2	1	60
187	0	1	0	3	0	2	0	2	4	1	1	51
	30	27	24	24	18	15	12	9	6	6	0	فاقد

ثم يتم بعد ذلك تحدد عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية، إن عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية كبير إذا أخذنا في الاعتبار الاحتمالات الممكنة لتكوين التوليفات، لذلك سيتم أخذ عينة من التوليفات وإجراء عملية المقارنة عليها، وهذه التوليفات كالتالي:

التوليفة الأولى:

يتم قطع 77 لفة بالطريقة الثانية وقطع 28 لفة بالطريقة الثالثة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (77 x 6) + (28 x 6) = 5.10 متر

الفاقد من اللفات الفائضة = (72 x 33) + (1 x 60) + (2 x 15) = 25.38 متر

الفاقد الكلي = 25.38 + 5.10 = 30.48 متر

= (30.48 x 260) = 7924.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

يتم قطع 50 لفة بالطريقة الثانية وقطع 53 لفة بالطريقة السادسة وقطع 8 لفات بالطريقة الثالثة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (50 x 6) + (53 x 15) + (8 x 6) = 11.13 متر

الفاقد نتيجة الفائض= (98 x 33) + (1 x 51) = 32.85 متر

الفاقد الكلي = 11.13 + 32.85 = 93.98 متر

= (43.98 x 260) = 1434.8 متر مربع

التوليفة الثالثة:

تم قطع 77 لفة بالطريقة الأولى وتم قطع 55 لفة بالطريقة الرابعة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (77 x 6) + (55 x 9) = 9.66 متر

الفاقد نتيجة الفائض= (237 x 33) + (1 x 60) = 78.21 متر

الفاقد الكلي = 9.66 + 87.21 = 87.87 متر.

= (87.87 x 260) = 22846.2 متر مربع.

تم اختيار التوليفة الأولى لإنتاج الطلبية بفرض توفر البعد (210) فقط.

2- البعد القياسي الثاني (بعرض 2.20 متر وطول 260 متر).

يتم تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم بواسطة برنامج الحاسوب وهي (140) توزيع قد وجد 11 توزيع منطقي وهي التي تحمل أقل قيمة للفاقد وكانت كالتالي:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	العدد المطلوب
33	2	3	5	1	0	3	1	0	3	6	1	4	5
60	0	2	0	3	1	1	1	0	0	0	1	1	153
51	3	0	1	0	3	1	1	4	2	0	2	0	187
فاقد	1	1	4	7	7	10	16	16	19	22	25	28	

بعد أن تم تحديد التوزيعات الأفضل نقوم بإجراء المفاضلة بين التوليفات لتوضيح المشكلة وهي كالتالي:

التوليفة الأولى:

تم قطع 30 لفة بطريقة التقسيم الرابعة وقطع 63 لفة بطريقة التقسيم الخامسة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (30 x 7) + (63 x 7) = 6.51 متر

الفاقد نتيجة الفائض = (25 x 33) + (2 x 51) = 9.27 متر

الفاقد الكلي = (6.5 + 9.27) = 15.78 متر

الفاقد الكلي (m^2) = (15.78 x 260) = 4102.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

تم قطع 51 لفة بطريقة التقسيم الرابعة وقطع 63 لفة بطريقة التقسيم الأولي.

الفاقد نتيجة التوزيع = (1 x 63) + (7 x 51) = 4.20 متر

الفاقد نتيجة الفائض = (132 x 33) + (2 x 51) = 60.54 متر

الفاقد الكلي = 4.20 + 60.54 = 64.74 متر

= (64.74 x 260) = 16832.4 متر مربع

التوليفة الثالثة:

تم قطع 50 لفة بالطريقة الرابعة و 60 لفة بالطريقة الخامس، و 7 لفات بالطريقة السابعة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (50 x 7) + (7 x 60) + (16 x 7) = 8.82 متر

الفاقد الناتج عن اللفائف الزائدة = (52 x 33) + (60 x 64) = 55.56 متر

الفاقد الكلي= 8.82 + 55.56 = 64.38 متر مربع

وبالمقارنة تم اختيار التوليفة الأولى في حالة توفر البعد القياسي 2.20 متر.

3- **البعد القياسي الثالث (بعرض 2.30 متر وطول 260 متر):**

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوزيعات الممكنة هي (140) وبتحديد أفضل توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بيانها كالتالي:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	العدد المطلوب
33	2	5	0	3	2	5	1	0	3	1	0	3	6	5
60	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	0	0	0	153
51	2	0	2	0	3	1	0	3	1	1	4	2	0	187
فاقد	2	5	8	11	11	14	17	17	20	26	26	29	32	

وبطريقة طرق التقسيم السابقة يمكن تحديد عدد من التوليفات وكانت:

التوليفة الأولى:

هي عبارة عن قطع 77 لفة بالطريقة الثالث وقطع 33 لفة بالطريقة السادسة.

وبالتالي يكون الفاقد نتيجة التوزيع =

$(33 \times 14) \div (77 \times 8) = 4.6 + 6.16 = 10.78$ متر

والفاقد نتيجة الفائض من اللفائف = ÷ (60) ÷ (33 × 160) = 53.40 متر

وبالتالي يكون الفاقد الكلي = (53.40 × 10.78) = 64.18 متر

الفاقد الكلي (متر) = 64.18 × 260 = 6686.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة السابعة وقطع 63 لفة بالطريقة الخامسة.

وكانت الفاقد نتيجة التوزيع = (51 × 17) + (٦٣ × 11) = 8.67 متر

والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= (51 × 2) ÷ (٣٣ × 174) = 55.52 متر

الفاقد الكلي = 55.52 ÷ 8.67 = 64.19 متر

الفاقد الكلي = 260 × 64.19 = 16689.4 متر مربع

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع لفة واحدة بالطريقة الثانية.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (94 × 8) ÷ ٥ = 7.57 متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= (60 × 36) ÷ (٣٣ × 5) = 23.25 متر

الفاقد الكلي = 30.82 × 260 = 8013.2 متر مربع

التوليفة الرابعة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع 5 لفائف بالطريقة السابعة.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (94 × 8) ÷ (٥ × 17) = 8.37 متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= (51 × 1) ÷ (60 × 50) = 30.51 متر

الفاقد الكلي = $8.37 + 30.51 = 38.88$ متر

الفاقد الكلي = $38.88 \times 260 = 10108.8$ متر مربع

وبالمقارنة بين الفاقد في التوليفات الرابعة نجد أن أفضل توليفة لإنتاج الطلبية باستخدام البعد القياسي (2300) متر هي التوليفة الثالثة التي تحقق أقل فاقد.

4- البعد القياسي الرابع (بعرض 2.400 متر وطول 260 متر):

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوليفات الممكنة هي (270) وقد تم اختيار أفضل 7 توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بينها كالتالي:

العدد المطلوب	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	3	1	0	5	2	3	0	5	2	7	0	4	2	1	0	33
153	1	3	1	0	0	2	2	1	1	0	3	0	2	0	4	60
187	1	0	3	1	3	0	2	0	2	0	1	2	1	4	0	51
	30	27	27	24	21	21	18	15	12	9	9	6	3	3	0	فاقد

وباستخدام طرق التقسيم أو التوزيعات المختارة يمكن تحديد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية وكانت كالتالي:

التوليفة الأولى:

تمت بقطع 39 لفة بالطريقة الأولى وقطع 47 لفة بالطريقة الثانية.

كان الفاقد نتيجة التوزيع = $3 \times 47 = 1.41$

والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف=

$(33 \times 42) \div (51 \times 1) + (60 \times 3) = 15.17$ متر

وكان الفاقد الكلي= $1.14 + 15.17 = 16.58$ متر

∴ الفاقد الكلي = 16.58 × 260 = 4310.8 متر مربع

الفاقد الكلي (متر) = 64.18 × 260 = 6686.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة الخامسة وقطع 34 لفة بالطريقة الثانية.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (51 × 9) ÷ (3 × 34) = 5.61 متر

وكان الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف = 9.57

الفاقد الكلي = 9.57 + 5.61 = 15.18 متر

الفاقد الكلي = 260 × 15.18 = 3946.8 متر

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 20 لفة بالطريقة الخامسة وقطع 41 لفة بالطريقة الثانية وقطع 25 لفة بالطريقة

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (41 × 3) + (9 × 25) = 3.48 متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف = (51 × 2) + (60 × 2) + (33 × 36) = 1410 متر

الفاقد الكلي = 9.57 + 5.61 = 15.18 متر

الفاقد الكلي = 260 × 15.18 = 3946.8 متر

بإجراء المقارنات بين الفاقد في التوليفات الثلاثة نجد أن التوليفة الثانية هي التي تحمل أقل فاقد وبالتالي تكون هي أفضل توليفة لإنتاج الطلبية.

إجراء الحل بطريقة البرمجة الخطية:

مد أن تم إيجاد الحل للمشكلة المدروسة بالطريقة التقليدية والتي تحتاج إلى زمن لإجراء خطوات الحل ولإجراء الحل بالصورة الرياضية تم استخدام طريقة (Big-M) بالاستعانة ببرنامج حاسب آلي موجود بملحق (2) وكان ذلك على النحو التالي:

صياغة نموذج رياضي لكل الحالة:

1- النموذج الأول باستخدام البعد القياسي (2.100) متر والجدول الآتي يوضح البيانات المتعلقة بالمشكلة.

العدد المطلوب	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	0	4	2	1	4	1	6	3	0	1	3	33
135	3	0	2	0	1	1	0	0	0	2	1	60
187	0	1	0	3	0	2	0	2	4	1	1	51
	30	27	24	24	18	14	12	9	6	6	0	فاقد

بعد ذلك يتم تحديد المعادلات والتي تمثل قيود النموذج الرياضي.

3x1 + x2 + 3x4 + x6 + x8 + 2x9 + x8 + 2x9 + 4x10 = عدد اللفائف المنتجة بعرض (33).

1 + 2x2 + x6 + x7 + 2x9 + 3x10 = عدد اللفائف المنتجة بعرض (60).

x + x3 + 2x6 + 2x4 + 4x3 + x2 + 1 = عدد اللفائف المنتجة بعرض (51).

يكون العدد الفائض من اللفائف عند الحد المطلوب

$Y1 = 1x1 + x2 + 3x4 + 6x5 + x6 + 4x7 + x8 + 2x9 + 4x10 = 5$

$Y2 = 1 = 1x2 + x6 + x7 + 2x9 + 3x11 = 151$

$Y3 = x1 + x2 + 4x3 + 2x6 + 3x7 + x9 + x9 = 187$

وبهذا تكون كمية الفاقد الكلي الناتج عن عملية التقسيم

L (6x2+6x3+94+12x5+15x6+18x7+24x8+24x9+27x10+30x11)

حيث L طول اللفة القياسية ويمكن إهماله لأنه عامل مشترك. كذلك يتم إهمال الفاقد Y1، Y2، Y3 وبهذا يمكن صيغة النموذج الرياضي على الصورة:

$$Zmin = 6\ x_2 + 6\ x_3 + 6\ x_4 + 12\ x_5 + 15\ x_1 + 24\ x_8 + 24\ x_9 + 27\ x_{10} + 30\ x_{11}$$

Subject To:

$$3\ x_1 - x_2 + 3\ x_4 + 6\ x_5 + x_6 + 4\ x_7 + x_8 + 2\ x_9 + 4\ x_{10} = 5$$

$$x_1 + 2\ x_2 \qquad + x_6 + x_7 + 2\ x_9 + 3\ x_{11} = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_6 + 2\ x_8 + x_{10} = 187$$

$$x_L \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{11} \geq 0$$

ولإجراء الحل على النموذج لابد من وضعه على الصورة القياسية كالتالي:

$$Zmin = 6\ x_2 + 6\ x_3 + 9\ x_4 + 12\ x_5 + 15\ x_6 + x_7 + 24\ x_8 + 24\ x_9 + 27\ x_{10} + 30\ x_{11} + MR1\ \ MR2 + MR2$$

Subject To:

$$3\ x_1 + x_2 + 3\ x_4 + 6\ x_5 + x_6 + 4\ x_7 + x_8 + 2\ x_9 + 4\ x_{10} + R1 = 5$$

$$x_1 + 2\ x_2 \qquad + x_6 + x_7 + 2\ x_9 + 3\ x_{11} + R2 = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4\ x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_6 + 3\ x_8 + x_{10} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{11} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

بعد وضع النموذج الرياضي على الصورة القياسية صار بالإمكان إجراء خطوات الحل بالطريق المبسط (BIG - M) وذلك بإدخاله في برامج:Linear Programming Analysis

$$Zmin = 5M\, x_1 + (4M\text{-}6)\, x_2 + (4M\text{-}6)\, x_3 + (9M\text{-}9)\, x_4 + (6M\text{-}12)\, x_5 +$$

$$(4M\text{-}5)\, x_6 + (5M\text{-}18)\, x_7 + (4M\text{-}24)\, x_8 + (4M\text{-}24)\, x_9 + (5M\text{-}27)\, x_{10}$$

$$+ (3M\text{-}30)\, x_{11}$$

Subject To:

$$3\, x_1 + x_2 \quad + 3\, x_4 + 6\, x_5 + x_6 + 4\, x_7 + x_8 + 2\, x_9 + 4\, x_{10} + R1 = 5$$

$$x_1 + 2\, x_2 \quad + x_6 + x_7 \quad + 2\, x_9 + 3\, x_{11} + R2 = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4\, x_3 + 2\, x_4 + 2\, x_6 \quad + 3\, x_8 \quad + x_{10} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{11} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

```
*******************************
*                                                    *
*           LINEAR PROGRAMMING                       *
*                 ANALYSIS                           *
*                                                    *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3
NUMBER OF VARIABELS 11
NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0
NUMBER FO = CONSTRAINTS 3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 2	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 5	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 6	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 7	0.50E+13	4.000	1.000	0.000
X 8	0.40E+13	1.000	0.000	3.000
X 9	0.40E+13	2.000	2.000	0.000
X 10	0.50E+13	4.000	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 5 = .8333334
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.٢0E+13	0.500	1.000	1.000
X 2	0.30E+13	0.160	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.20E+13	0.500	0.000	2.000
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.30E+13	0.160	1.000	2.000
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	0.30E+13	0.160	0.000	3.000
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	0.10E+13	0.660	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	0.830	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.41E+14

ITERATION 2
BASIS
X 3 = 46.75
X 5 = 0.8333334
X 14 = 154

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.10E+13	0.500	1.000	0.250
X 2	0.20E+13	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 4	0.00E+13	0.500	0.000	0.500
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.10E+13	0.160	1.000	0.500
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	-.18E+13	0.160	0.000	0.750
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.15E+15	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.54E+14

ITERATION 3
BASIS
X 3 = 46.75
X 5 = .8333334
X 14 = 51.33334

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.18E+02	0.500	0.300	0.2
X 2	0.18E+02	0.160	0.600	0.2
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.0
X 4	0.00E+00	0.500	0.000	0.5
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.0
X 6	0.00E+00	0.160	0.330	0.5
X 7	0.00E+00	0.660	0.330	0.0
X 8	-.18E+02	0.160	0.000	0.7
X 9	0.00E+00	0.330	0.660	0.0
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.2
X 11	0.00E+13	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.0
R 2	-.10E+13	0.000	0.330	0.0
R 3	-.00E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.18E+04	0.830	51.33	46

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1830

ITERATION 4
BASIS
X 1 = 1.666667
X 3 = 46.33333
X 11 = 50.77778

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.00E+12	0.500	1.000	0.250
X 2	0.12E+02	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 4	-.15E+02	0.500	0.000	0.500
X 5	-035E+02	1.000	0.000	0.000
X 6	-.58E+01	0.160	1.000	0.500
X 7	-.23E+02	0.660	1.000	0.000
X 8	-.23E+02	0.160	0.000	0.750
X 9	-.12E+02	0.330	2.000	0.000
X 10	-.41E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.00E+12	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.18E+04	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1801.33

ITERATION 5
BASIS
X 2 = 5
X 3 = 45.5
X 11 = 48

Basis	C (j) - Z (J)	X5	R2	R3
X 1	-.35E+02	3.000	-1.67	-.50
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.00
X 4	-.53E+02	3.000	-2.00	-.25
X 5	-.11E+03	6.000	-4.00	-1.5
X 6	-.18E+02	1.000	-3.00	0.25
X 7	-.70E+02	4.000	-2.34	-1.0
X 8	-.35E+02	1.000	-.670	0.5
X 9	-.35E+02	2.000	-.670	-.50
X 10	-.88E+02	4.000	-2.67	-.70
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	1.000	-.670	-.2
R 2	-.10E+13	0.000	.300	0.0
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.17E+04	5.000	48.00	45

THE VARIABLES WHICH FORM THE SOLUTION SPACE

X 2 = 5

X3 = 45.5

X 11 = 48

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1743

TOTAL SCRAP = 260 * 1743 = 4531

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.200) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

العدد المطلوب	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	4	1	6	3	0	1	3	0	1	5	3	2	33
153	1	1	0	0	0	2	1	1	3	0	2	0	60
187	0	2	0	2	4	1	1	3	0	1	0	3	51
	28	25	22	19	16	16	10	7	7	4	1	1	فاقد

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$Zmax = (5M\text{-}1)\ x_1 + (5M\text{-}1)\ x_2 + (6M\text{-}4)\ x_3 + (4M\text{-}7)\ x_4 + (4M\text{-}7)\ x_5 +$$

$$(5M\text{-}10)\ x_6 + (4M\text{-}16)\ x_7 + (4M\text{-}18)\ x_8 + (5M\text{-}19)\ x_9 + (6M\text{-}22)\ x_{10}$$

$$+ (4M\text{-}25)\ x_{11} + (5M\text{-}25)\ x_{12} + MR1 + MR2 + MR3$$

Subject To:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \quad + 3x_6 + x_7 + 3x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 9x_{12} + R1 = 5$$

$$2x_2 \quad +3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12} + R2 = 154$$

$$3x_1 \quad + x_3 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 2x_{11} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{12} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

بعد أن تم وضع النموذج في الصورة القياسية يمكن البدء في إجراءات الحل:

المتغير الداخل x_{10} والمتغير الخارج R_1.

```
*******************************
*                                        *
*        LINEAR PROGRAMMING              *
*              ANALYSIS                  *
*                                        *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3

NUMBER OF VARIABELS 1٢

NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0

NUMBER FO = CONSTRAINTS 3

NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0

X 12 = 5

X 13 = 154

X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 2	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 3	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 4	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 5	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 6	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 10	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 11	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 3 = 1
X 14 = 154
X 15 = 186

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.٢6E+13	0.400	0.000	2.000
X 2	0.14E+13	0.660	2.000	-.100
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.000
X 4	0.28E+13	1.000	3.000	-1.00
X 5	0.40E+12	0.200	1.000	3.000
X 6	0.14E+13	0.600	1.000	0.000
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	1.000
X 10	-.12E+13	0.200	0.000	-1.00
X 11	0.28E+13	0.200	0.000	-.100
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.100
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2
BASIS
X 3 = 1
X 5 = 62
X 14 = 92

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.87E+13	0.400	-870	0.860
X 2	-.22E+13	0.600	2.200	0.000
X 3	0.00E+13	1.000	0.000	-.070
X 4	0.31E+13	0.200	3.060	1.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	0.130
X 6	0.87E+13	0.600	0.860	0.260
X 7	0.17E+13	0.200	1.730	1.330
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.330
X 9	-.47E+13	0.600	-.470	0.460
X 10	0.40E+13	1.200	0.400	-.410
X 11	0.40E+13	0.200	0.390	0.600
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.93E+13	0.200	0.060	-.070
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.330
SOLU	0.92E+14	1.000	92.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 9.2E+13

TERATION 3

BASIS

X 3 = 5

X 5 = 62.33333

X 14 = 76.66666

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.70E+13	2.000	-7.00	1.000
X 2	-.70E+13	3.000	-7.00	0.000
X 3	-.15E+13	5.000	-15.3	0.300
X 4	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 6	-.83E+13	3.000	-8.34	0.300
X 7	-.13E+13	1.000	-1.34	0.300
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.300
X 9	-.97E+13	3.000	-9.67	0.000
X 10	-.18E+13	6.000	-18.0	0.000
X 11	-.27E+13	1.000	-2.67	0.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.40E+13	1.000	-3.00	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.000
SOLU	0.77E+14	5.000	76.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 7.67E+

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.300) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	العدد المطلوب
33	2	5	0	3	2	5	1	0	3	1	0	3	6	5
60	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	0	0	0	153
51	2	0	2	0	3	1	0	3	1	1	4	2	0	187
فاقد	2	5	8	11	11	14	17	17	20	26	26	29	32	

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$Zmax = (5M-2)\ x_1 + (6M-5)\ x_2 + (4M-8)\ x_3 + (5M-11)\ x_4 + (5M-11)\ x_5 +$$
$$(6M-14)\ x_6 + (4M-17)\ x_7 + (4M-17)\ x_8 + (5M-20)\ x_9 + (4M-26)\ x_{10}$$
$$+ (4M-26)\ x_{11} + (5M-29)\ x_{12} + (6M-32)\ x_{13} + MR1 + MR2 + MR3$$

Subject To:

$2\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_4 + 2\ x_5 + 5\ x_6 + x_7 + 3\ x_9 + x_{10} + 3\ x_{11} + 6x_{12} + R1 = 5$

$x_1 + x_2 + 2\ x_3 + 2\ x_4 + 3\ x_7 + x_8 + 1\ x_9 + 2\ x_{10} + x_{13} + R2 = 154$

$2x_1 + 2\ x_3 + 3\ x_5 + x_6 + 3\ x_8 + x_9 + x_{10} + 4\ x_{11} + R3 = 187$

$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{13} \geq 0$

$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$

بعد صياغة النموذج في صورته القياسية يتم البدء في إجراء الحل بوضع النموذج في الجداول الخاصة بالطريقة.

```
********************************
*                              *
*     LINEAR PROGRAMMING       *
*          ANALYSIS            *
*                              *
********************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3
NUMBER OF VARIABELS 13
NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0
NUMBER FO = CONSTRAINTS 3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R5	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 2	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 3	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 4	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 5	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 6	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 9	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 10	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 13	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	1.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	0.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

ITERATION 1
BASIS
X 1 = 1
X 14 = 153
X 15 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.٢6E+13	0.400	0.000	0.60
X 2	0.00E+13	1.000	2.000	0.00
X 3	0.40E+12	0.000	0.000	2.00
X 4	0.14E+13	0.600	3.000	1.40
X 5	0.26E+12	0.400	1.000	-0.40
X 6	0.00E+13	1.000	1.000	-1.00
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	2.00
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	1.00
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	0.39
X 10	0.28E+13	0.200	0.000	1.80
X 11	0.40E+13	0.000	1.000	0.00
X 12	0.14E+13	.0.600	3.000	-0.61
X 13	-.12E+13	1.200	3.000	-1.21
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	153.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2

BASIS

X 2 = 1

X 3 = 76.5

R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.14E+13	0.400	0.300	1.400
X 2	0.00 E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
X 4	-.14E+13	0.600	0.700	-1.400
X 5	0.34E+13	0.400	-0.200	3.400
X 6	0.20E+13	1.000	-0.500	2.000
X 7	-.28E+13	0.200	1.400	-2.800
X 8	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 9	0.60E+12	0.600	0.190	0.600
X 10	-.80E+13	0.200	0.900	-0.800
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.26E+13	0.600	-0.310	2.600
X 13	0.12E+13	1.200	0.610	1.200
R 1	-.80E+12	0.000	-0.100	0.200
R 2	-.20E+13	0.000	0.500	-1.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.92E+14	1.000	76.50	34.00

TERATION 3

BASIS

X 2 = 5

R 3 = 76.5

R 11 = 8.5

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.12E+02	0.400	0.300	0.60
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	2.00
X 4	-.12E+02	0.600	0.700	1.40
X 5	0.12E+02	0.400	-0.200	-0.40
X 6	0.00E+00	1.000	-0.500	-1.00
X 7	-.28E+02	0.200	1.400	2.00
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	1.00
X 9	-.12E+02	0.600	0.190	0.39
X 10	-.28E+02	0.200	0.900	1.80
X 11	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
X 12	-.12E+02	0.600	-0.310	-0.61
X 13	-.23E+02	1.200	-0.610	-1.21
R 1	-.10E+13	0.200	-0.100	-.20
R 2	-.10E+13	0.000	0.500	1.00
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.84E+03	1.000	76.50	153.0

TERATION 4
BASIS
X 2 = 2.5
X 3 = 76.75
X 11 = 7.625

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	0.300	0.000
X 2	-.29E+02	2.500	-0.750	-0.880
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 4	-.29E+02	1.500	0.240	0.880
X 5	0.00E+00	1.000	-0.500	0.500
X 6	0.29E+02	2.500	-1.250	-0.380
X 7	-.29E+02	0.500	1.250	-0.880
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	0.500
X 9	-.29E+02	1.500	-0.380	-0.380
X 10	-.29E+02	0.500	-0.380	-0.380
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	1.000
X 12	-.29E+02	1.500	0.120	0.120
X 13	-.58E+02	3.000	-0.750	-0.75
R 1	-.10E+13	0.500	-0.130	-0.130
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	-0.250
R 3	-.10E+13	0.000	0.250	0.250
SOLU	0.81E+03	2.500	7.620	7.620

The variables which form the solution space:

X 1 = 2.5
X 3 = 75.75
X 11 = 7.625
Objective function value: 809.25
total scrap = 809 * 260 = 2104.2104.05 m^2

4- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.400) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	العدد المطلوب
33	0	1	2	4	0	7	2	5	0	3	2	5	0	1	3	5
60	4	0	2	0	3	0	1	1	2	2	0	0	1	3	1	153
51	0	4	1	2	1	0	2	0	2	0	3	1	3	0	1	187
فاقد	0	3	3	6	9	9	12	15	18	21	21	24	27	27	30	

وبذلك يمكن وضع النموذج القياسي على الصورة:

$Zmin = 3 x_2 + 3 x_3 + 6 x_4 + 9 x_5 + 9 x_6 + 12 x_7 + 15 x_8 + 18 x_9 + 21 x_{10} + 2 x_{11} + 24 x_{12} + 27 x_{13} + 27 x_{14} + 30 x_{15} + MR1 \quad MR2 + MR2$

Subject To:

$x_1 - 2x_2 + 4x_4 + 7x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_{10} + 2x_{11} + 5x_{12} + x_{14} + 3x_{15} + R1 = 5$

$4x_1 + 2x_2 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + R2 = 154$

$4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2 x_7 + 2x_9 + 3x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{15} + R3 = 187$

$x_1 \ x_2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ x_{15} \geq 0$

$R1 , R2 , R3 \geq 0$

```
*******************************
*                                    *
*        LINEAR PROGRAMMING          *
*              ANALYSIS              *
*                                    *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3
NUMBER OF VARIABELS 15
NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0
NUMBER FO = CONSTRAINTS 3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.40E+13	0.000	4.000	0.000
X 2	0.50E+13	1.000	0.000	4.000
X 3	0.50E+13	2.000	2.000	1.000
X 4	0.60E+13	4.000	0.000	2.000
X 5	0.40E+13	0.000	3.000	1.000
X 6	0.70E+13	7.000	0.000	0.000
X 7	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 8	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 10	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 13	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 14	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 15	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 6 = .7142858
X 17 = 154
X 18 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X6	R2	R3
X 1	0.٤٠E+13	0.000	4.000	0.60
X 2	0.40E+13	0.140	0.000	0.00
X 3	0.30E+13	0.280	2.000	2.00
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	1.40
X 5	0.40E+12	0.000	3.000	-0.40
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	-1.00
X 7	0.30E+13	0.280	1.000	2.00
X 8	0.10E+13	0.710	1.000	1.00
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	0.39
X 10	0.20E+13	0.420	2.000	1.80
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	0.00
X 12	0.10E+13	0.710	0.000	-0.61
X 13	0.40E+13	.0.000	1.000	-1.21
X 14	0.30E+13	0.140	3.000	0.00
X 15	0.20E+13	0.420	1.000	0.00
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	0.710	154	153

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2
BASIS
X 2 = 1
X 3 = 76.5
R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.40E+12	0.140	0.000	4.000
X 3	0.10E+13	0.280	0.500	1.000
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 7	0.20E+13	0.280	0.250	2.000
X 8	-.86E+01	0.710	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.17E+02	0.420	0.500	0.000
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	3.000
X 12	0.10E+13	0.710	0.010	1.000
X 13	0.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.26E+02	0.140	0.750	0.000
X 15	0.10E+13	0.420	0.250	1.000
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.19E+14	1.710	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.87E+14

TERATION 3

BASIS

X 1 = 38.5

X 2 = 5

X 18 = 167

Basis	C(j) - Z(J)	X2	X1	R3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	4.000
X 3	-.70E+13	2.000	0.500	1.000
X 4	-.14E+14	4.000	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	-.28E+14	6.000	0.000	0.000
X 7	-.60E+13	2.000	0.250	2.000
X 8	-.20E+14	5.000	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.12E+14	3.000	0.500	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.19E+14	5.000	0.000	1.000
X 13	-.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.40E+14	1.000	0.750	0.000
X 15	-.11E+14	3.000	0.250	1.000
R 1	-.50E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.84E+03	5.000	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.78E+14

TERATION 4
BASIS
X 1 = 24.58333
X 2 = 5
X 13 = 55.66667

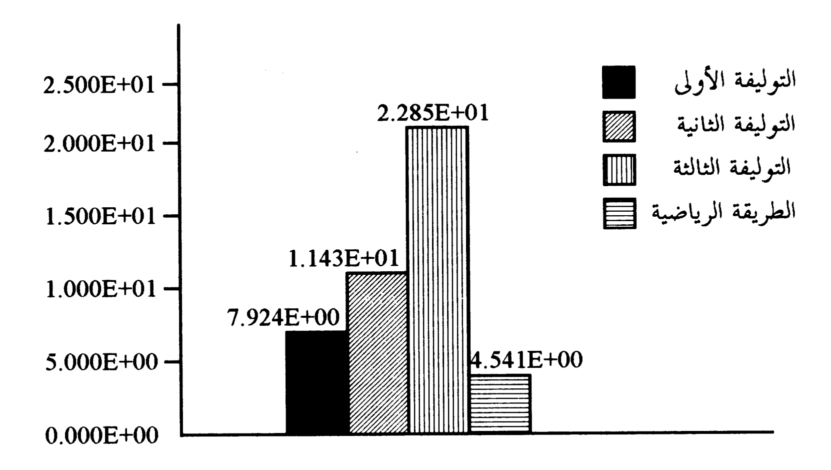
Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	-.60E+02	2.000	1.080	-2.34
X 4	-.12E+03	4.000	1.160	-4.67
X 5	0.00E+00	0.000	0.660	0.330
X 6	-.24E+03	6.000	2.330	-9.34
X 7	-.60E+02	2.000	0.750	-2.00
X 8	-.18E+03	5.000	1.910	-6.670
X 9	0.00E+00	0.000	0.330	0.660
X 10	-.12E+03	3.000	0.500	-4.00
X 11	0.60E+02	2.000	0.410	-1.67
X 12	0.18E+03	5.000	1.580	-6.34
X 13	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 14	-.60E+02	1.000	1.080	-1.34
X 15	-.12E+03	3.000	1.160	-3.670
R 1	-.10E+13	1.000	0.330	-1.340
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.10E+13	0.000	-.090	0.330
SOLU	0.15E+03	2.500	24.58	55.66

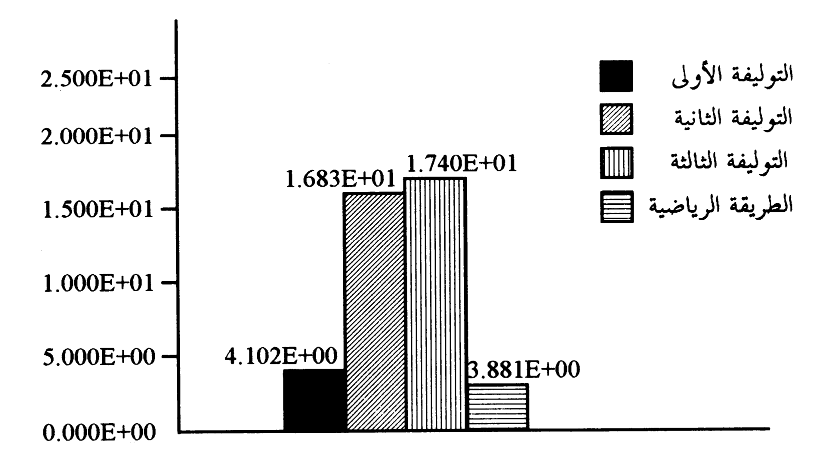
The variables which form the solution space:

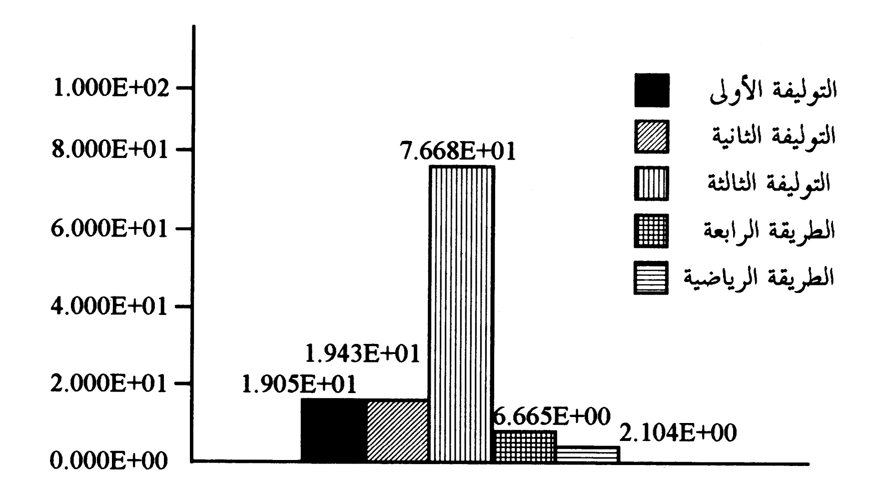
X 1 = 24.58333
X 2 = 5
X 13 = 55.66667
Objective function value: 1518
Total scrap = 15018 * 260 = 3946.8 m^2

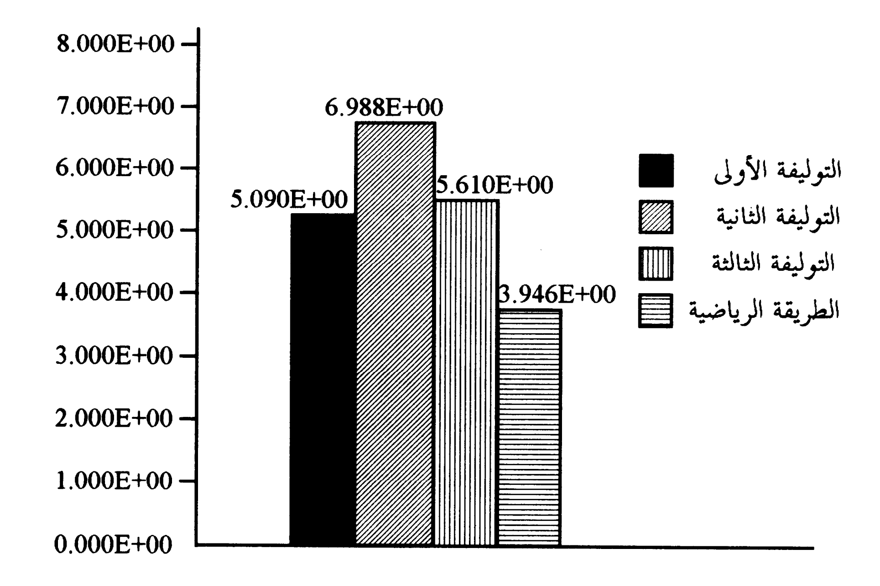
6.7 الخلاصة:

بعد إجراء الحسابات اللازمة لإيجاد قيمة الفاقد بالطريقتين التقليدية الرياضية وكما هو موضح بالأشكال. وجد أن استخدام أسلوب البرمجة الخطية في تقليل الفاقد يحقق أقل قيمة للفاقد يعطي نتائج في زمن أقل باستخدام الحاسب الآلي.






1.000E+02
8.000E+01
6.000E+01
4.000E+01
2.000E+01
0.000E+00
1.905E+01
1.943E+01
7.668E+01
6.665E+00
2.104E+00
التوليفة الأولى
التوليفة الثانية
التوليفة الثالثة
الطريقة الرابعة
الطريقة الرياضية


8.000E+00
7.000E+00
6.000E+00
5.000E+00
4.000E+00
3.000E+00
2.000E+00
1.000E+00
0.000E+00
5.090E+00
6.988E+00
5.610E+00
3.946E+00
التوليفة الأولى
التوليفة الثانية
التوليفة الثالثة
الطريقة الرياضية

6.8 مسائل:

أوجد حل المسائل الآتية بواسطة طريقة السمبلكس

-1

Max $z = 20x_1 + 24x_2$

S.T.

$2x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 + 3x_2 \leq 48$

$x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-2

Max $z = 30x_1 + 50x_2$

S.T.

$2x_1 + x_2 \leq 16$

$x_1 + 2x_2 \leq 11$

$x_1 + 3x_2 \leq 15$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-3

Max $z = 10x_1 + 20x_2$

S.T.

$5x_1 + 8x_2 \leq 40$

$5x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-4

Max $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T.

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1 + 4x_2 \leq 40$

$x_1 , x_2 \geq 0$

Max $z = -2x_1 + x_2$ -5

S.T.

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0$

$-\infty < x_2 < +\infty$

Max $z = -x_1 - 2x_2 + x_5$ -6

S.T.

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

$2x_2 - x_3 \leq 3$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Max $z = 2x_1 - 12x_2 + 7x_5$ -7

S.T.

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10.000$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4000$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

Max $z = 6x_1 + 8x_2$ -8

S.T.

$x_1 - 3x_2 \geq -3$

$x_1 + 3x_2 \geq -6$

$2x_1 + x_2 \leq 8$

$4x_1 - x_2 \leq 16$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-9

Max $z = -3x_1 - 2x_2$

S.T.

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$6x_1 + 4x_2 \leq 24$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 16$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-10

Min $z = 3x_1 - x_2$

S.T.

$x_1 + 2x_2 \geq 12$

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$3x_1 + 6x_2 \geq 36$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-11

Max $z = 5x_1 + x_2$

S.T.

$x_1 + x_2 \leq 12$

$4x_1 + x_2 \leq 20$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-12

Max $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T.

$x_1 + x_2 \leq 3$

$3x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 , x_2 \geq 0$

-13 Max $z = 4x_1 + 7x_2 + x_3$

S.T.

$x_1 + 2x_2 = 12$

$3x_1 + x_2 = 18$

$x3 \geq 2$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

-14 Max $z = x_1 + 4x_2 + x_5$

S.T.

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$

$- 3x_2 + x_3 = - 4$

$x_1 + x_3 = 3$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

-15 Max $z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_5$

S.T.

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$

$5x_1 - x_3 \leq 2$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

-16 Max $z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_5$

S.T.

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$

$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

-17

$$\text{Max} \quad z = 4x_1 + 3x_2 + x_5$$

S.T.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 22$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$$
$$-x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42$$
$$x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0$$

-18

$$\text{Max} \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_5$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$$
$$5x_1 - x_3 \leq 2$$
$$x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0$$

الفصل السابع

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

يناقش هذا الفصل بالأمثلة التوضيحية تقنية النموذج الثنائي وكيفية استخدامها في تحوير البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائي. ويتناول الفصل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي، وأهمية هذه العلاقة، بالإضافة إلى مناقشة طرق حسابهما، وطريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس. كما يسلط الفصل الضوء على تحليل الحساسية من خلال الأمثلة والتمارين التطبيقية.



الفصل السابع

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

Duality in Linear Programming

7.1 مقدمة:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية (Duality) والتي تعرف بتحوير نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية (Sensitivity Analysis).

ويعرف النموذج الثنائي أيضا بأنه النموذج المماثل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول.

فمثلا النموذج الأول يمكن أن يعرف على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} \text{MAXIMIZE} \\ \text{أو} \\ \text{MINIMIZE} \end{bmatrix} \quad Z = \sum_{J=1}^{n} C_J x_J$$

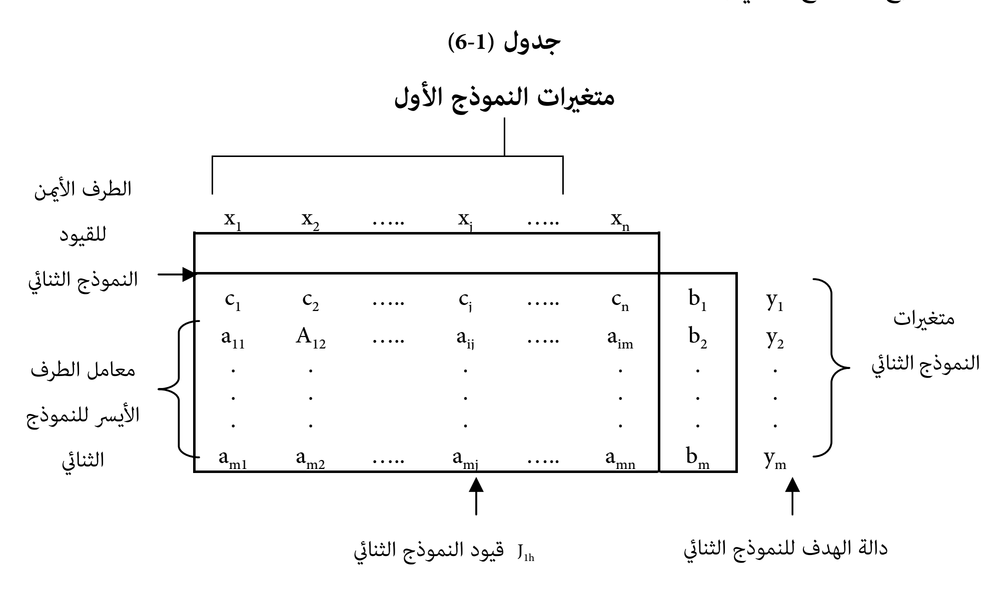
$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad L = 1,2,......m$$

$$x_j \geq 0 \quad J = 1,2,......n$$

مع ملاحظة أن x_j تحتوي على المتغير الفائض والمتغير الصناعي.

ولتوضيح النموذج الثنائي بالنظر إلى الجدول (6.1)

جدول (6-1)



والقاعدة تعني أن النموذج الثنائي له متغيرات m $(y_1, y_2, .. y_m)$ وله قيود n مقابلة $(x_1, x_2, .. .x_n)$.

والجدول رقم (6-2) يوضح الانتظام في التغيرين النموذج الأول والنموذج الثنائي.

جدول (6-2)

دالة الهدف للنموذج الأول	النموذج الثنائي		
	دالة الهدف	القيود	المتغيرات
تعظيم (MAX)	تصغير	≥	غير محددة
تصغير (MIN)	تعظيم	≤	غير محددة

والأمثلة التالية توضح فكرة تغيير النموذج الأول إلى النموذج الثنائي:

مثال 7.1:

النموذج الأول:

Max $z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3$

S.T.

$x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 10$

$2\,x_1 = x_2 + 3\,x_3 = 8$

$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3 \geq 10$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

Max $z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 + 0\,x_4$

S.T.

$x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$2\,x_1 = x_2 + 3\,x_3 + 0\,x_4 = 8$

$x_1\,,\ x_2\,,\ x_3\,,\ x_4 \geq 0$

∴ النموذج الثنائي: (Dual)

Min $w = 10\,y_1 + 8\,y_2$

S.T.

x_1 : $y_1 + 2\,y_2 \geq 5$

x_2 : $2\,y_1 - y_2 \geq 12$

x_3 : $y_1 + 3\,y_2 \geq 4$

x_4 : $y_1 + 0\,y_2 \geq 0$

$y_1\,,\,y_2$ غير محددة.

مثال 7.2:

Max $z = 5x_1 - 2x_2$

S.T.

$-x_1 + x_2 \geq -3$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1 ,\ x_2 \geq 0$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

Min $z = 5x_1 - 2x_2$

S.T.

$x_1 - x_2 + x_3 = 3$

$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$

$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 , x_4 \geq 0$

النموذج الثنائي:

Max $w = 3y_1 + 5y_2$

S.T.

$y_1 + 2y_2 \leq 5$

$-y_1 + 3y_2 \leq -2$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

غير محدد الإشارة y_1 , y_2 .

مثال 7.3:

Min $z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

S.T.

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$

$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 17$

$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3$

ويمكن إعادة كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

S.T.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq -40$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 17$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

أما النموذج الثنائي:

$$\text{Max} \quad w = -40y_1 + 17y_2$$

S.T.

$$-y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$-y_1 - y_2 \leq 3$$

$$-y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1,\ y_2 \leq 0$$

7.2 العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي:

1- إن تحويل النموذج الثنائي إلى نموذج ثنائي يتحول إلى نموذج أول.

2- المصفوفة A (m x n) للنموذج الأولى تعطي المصفوفة (n x m) للنموذج الثنائي.

3- لكل قيود النموذج الأولى توجد علاقة لمتغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح.

4- لكل متغير في النموذج الأول، توجد علاقة له بقيود النموذج الثنائي والعكس صحيح.

5- لكل حل ابتدائي للنموذج الأول.

أ- $z \leq Z$

ب- $z^* = Z^*$

ج- إذا كان $C x_o = w_o b$ ومنها

$$x_o = x^* \qquad w_0 = w^*$$

6- إذا كان النموذج الأول يوجد له حل أمثل فإن النموذج الثاني له حل أمثل.

7- إذا كان النموذج الأول له حل غير محدود فإن النموذج الثاني لا يوجد له حل والعكس صحيح.

ويمكن شرح العلاقة بين النموذج الأول (Primal problem) والنموذج الثاني (Dual problem) بواسطة العلاقة الرياضية التالية:

النموذج الأول

$$\text{Max } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

النموذج الثاني

$$\text{Min } z = 10y_1 + 8y_2$$

S.T.

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 - 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0 \; - \infty \; c \; y_2 \; c \neq \infty$$

وبحل المسألتين كل على حدة بواسطة طريقة السمبلكس تلاحظ الحل في الجداول (6.3) و (6.4).

المعلومات التالية يمكن استنتاجها.

[الحل الأمثل لـ معادلة z للمسألة الأولى] = [الفرق ما بين الشمال واليمين لقيود المسألة الثنائية المصاحبة للمتغيرات].

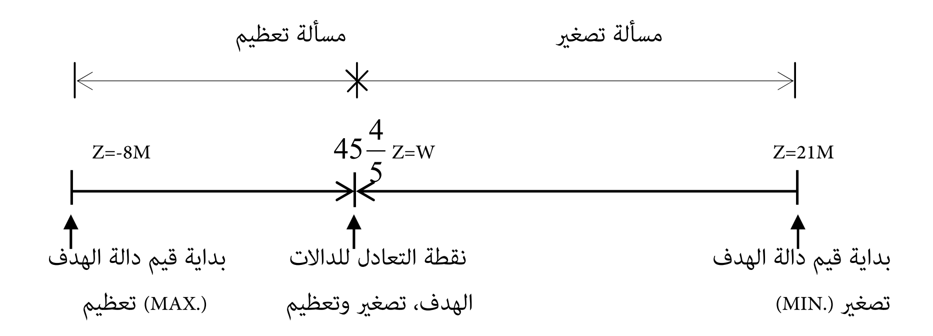
جدول (6-3)

المحاولة	أساس	x_1	x_2	x_3	x_4	R	الحل
0 (starting	z	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-8M
x_3 enters	x_4	1	2	1	1	0	10
R leaves	R	2	-1	3	0	1	8
1	z	-7/3	-40/3	0	0	$\frac{4}{3}+M$	32/3
x_2 enters	x_4	1/3	7/3	0	1	-1/3	22/3
x_4 leaves	R	2/3	-1/3	1	0	1/3	8/3
2	z	-3/7	0	0	40/7	$-\frac{4}{3}+M$	368/7
x_1 enters	x_2	1/7	1	0	3/7	-1/7	22/7
x_3 leaves	x_3	5/7	0	1	1/7	2/7	26/7
3	Z	0	0	3/5	29/5	$-\frac{2}{5}+M$	$54\frac{4}{5}$
(optimal)	x_2	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
	x_1	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5

جدول (6-4)

Iteration	Basic	y_1	y'_2	y''_2	y_3	y_4	y_5	R_1	R_2	R_3	Solution
	W	-10+4M	-8+4M	8-4M	-M	-M	-M	0	0	0	21M
0	R_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
(starting)	R_2	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
	R3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
	W	0	0	0	-26/5	-12/5	0	26/5-M	12-5-M	-M	$54\frac{4}{5}$
4	y_5	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
(optimal)	y''_2	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	-1/5	-1	2/5
	y_1	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5

وباقي المعلومات التي يمكن تحديدها في الشكل 6.1.



وهذه النتائج يمكن تعميمها لزوج المسألة الأولى والثنائية.

1- لكل من الحل الابتدائي للمسألة الأولى والثنائية

(دالة الهدف لمسألة تعظيم) $\geq$ (دالة الهدف لمسألة تصغير)

2- الحل الأمثل للمسألة الأولي والثنائية

(دالة الهدف لمسألة تعظيم) = (دالة الهدف لمسألة تصغير)

7.3 أهمية العلاقة ما بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي وحساباتها:

لغرض دراسة عملية تحليل الحساسية (Sensitivity analysis) يأتي اهتمامنا بالنتيجة التي يمكن تغيرها بواسطة تغيير المعاملات والتي يمكن تؤثر على مسار الحل المحقق سواء كان الحل الابتدائي أو الحل الأمثل المعهود. ونلاحظ عند تغير الطرق الأيمن أو معاملات المتغيرات سوف نحتاج إلى إعادة حساب المسألة من جديد للتأكد من وجود حل ابتدائي أو حل أمثل للمسألة من خلال المعلومات المتوفرة بجداول

السمبلكس. ويمكن تحقيق وجود حل سريع بدون إعادة حل المسألة من جديد بواسطة العلاقة ما بين النموذج الخطي الابتدائي الثنائي. ويمكن تطوير طريقة حسابية تسمى بالسمبلكس الثنائي (Dual simplex).

وقبل شرح هذه الطريقة يستوجب النظر على بعض التعريفات الجبرية المهمة.

تعريف:

تعرف المصفوفة (m x n) بأنها مصفوفة مستطيلة ولها صفوف m وأعمدة n، وحجم صفوف n (1 x n) وحجم الأعمدة (m) هي (m x 1) وأن المصفوفة (m x n) تحتوي على m صفوف و n أعمدة وعلى سبيل المثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة ذات حجم (2 × 3) لها عمودين هما $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

وكل عمود له ثلاثة صفوف على النحو الآتي:

(0 , 1)   (4, -1)   (3 , 2)

طريقة ضرب المصفوفات:

لو فرضنا مصفوفة الصف V

$$V = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_m)$$

والمصفوفة المستطيلة A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$V.A = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{L=1}^{m} v_i a_{i1} \sum_{L=1}^{m} v_i a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{L=1}^{m} v_i a_{in}$$

ولو مثلنا هذه الأرقام فإن:

$$= (11, 22, 33)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$= (3x11+4x22+6x33, -1x11+8x22+9x33)$

$= (319 , 462)$

أما مضروب مصفوفة A x P حيث

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$A \times P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} p_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} p_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} p_j \end{bmatrix}$$

ولو مثلنا هذه القاعدة بالأرقام فإن:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\times & 1+22\times 5+33\times 7 \\ 11\times & 2+22\times 0+37\times 8 \\ 11\times & 3+22\times 6+33\times 9 \\ 11\times & -1+22\times 4+33\times -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 352 \\ 386 \\ 462 \\ 11 \end{matrix}$$

7.4 طرق حساب النموذج الأولي والثنائي:

يمكن شرح طريقة حساب النموذج الأولي، الثنائي باستخدام أزواج من مسائل النموذج الأول والثنائي والتي يعطي طريقة حلها بالسمبلكس في الجداول (7.1)، (7.2) حيث:

النموذج الأولي:

Max $\quad z = 5\,x_1 + 12\,x_2 + 4\,x_3 - MR$

S.T.

$(y_1)\ x_1 + 2\,x_2 + x_3 + 4\,x_3 = 10$

$(y_2) 2\,x_1 - x_2 + 3\,x_3 + R = 8$

$x_1\ ,\ x_2,\ x_3\ ,\ R \geq R$

النموذج الثنائي (Dual):

Minimize $\quad z = 10\,y_1 + 8\,y_2$

S.T.

$y_1 + 2\,y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$2y_2 - y_2 \geq 5 \qquad (x_2)$

$y_1 + 3\,y_2 \geq 4 \qquad (x_3)$

$y_1 + 2\,y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$y_1 \geq 0 \qquad (x_1)$

$y_2 \geq -M \qquad (R)$

y_2 غير محدودة الإشارة (Unrestricted)

7.4.1 طرق حساب قيود الأعمدة:

عند أي محاولة لإحدى محاولات طريقة السمبلكس (أولي، أو ثنائي) فإن عناصر العمود الشمالية أو اليمنى لأي قيد من مصفوفات الجدول ويمكن حسابها على النحو الآتي:

(العمود في محاولة i) = (معكوس المحاولة i) × (العمود الأصلي)

ولتوضيح هذه المعادلة باعتبار المسألة الأولية أعلاه فإن بداية الحل الأساسي لـ x_3 ، R في الجدول (7.1)، فإن المصفوفة المعكوسة في كل محاولة (Iteration)، فلو اعتبرنا المحاولة رقم (1) وقيد x_1.

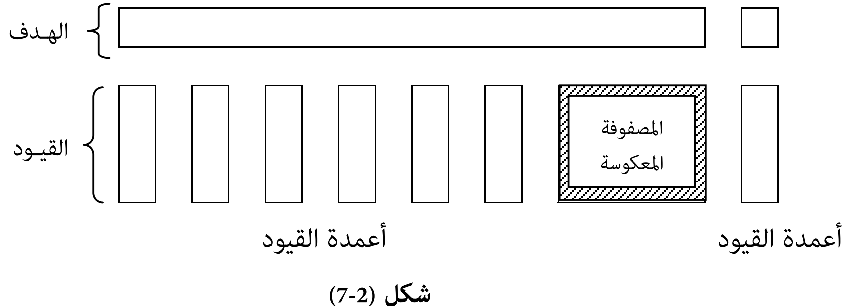
(العمود x_1 في الأصلي) = (معكوس المحاولة الأولى) × (العمود x_1 الأصلي)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

في محاولة رقم (2)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{1} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{26}{7} \end{bmatrix}$$

لتوضيح الطريقة بالرسم كما هو في الشكل (7.2).



شكل (7-2)

7.4.2 طريقة حساب صف دالة الهدف:

عند أي محاولة أثناء إجراء عملية السمبلكس للمسألة الأولية، فإن عناصر معادلة دالة الهدف لكل متغير x_j يمكن حسابها بالطريقة التالية:

(الجانب الأيمن من القيد الثنائي المقابل) - (الجانب الأيسر من القيد الثنائي المقابل) = (عنصر x_1 × معادلة الهدف).

وبتطبيق هذه المعادلة على النموذجين الأول والثاني السابقين سنحصل على المعادلات الآتية:

بتطبيق المعادلة أعلاه فإن:

معامل z لـ $x_1 = 5 - 2y_2 + y_1$

معامل z لـ $x_2 = 12 - 2y_2 + 2y_1$

معامل z لـ $x_3 = 4 - 3y_2 + y_1$

معامل z لـ $x_4 = 0 - y_1$

معامل $R = (-M) - y_2 = M + y_2$

ولحساب هذه المعاملات عدديا نحتاج إلى قيم عددية للمتغيرات y_1 ، y_2 لأن معاملات دالة الهدف تتغير عند أي محاولة، ونتوقع أن قيم y_1، y_2 تتغير من محاولة إلى التي بعدها، والصياغة التالية يمكن استخدامها لحل إيجاد قيم المتغيرات الثنائية عند أي محاولة.

$$\begin{pmatrix}\text{قيم المتغيرات الثنائية} \\ \text{عند أي محاولة i}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{معامل دالة الهدف الأصلية} \\ \text{عند أي محاولة i}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{معكوس المصفوفات} \\ \text{عند أي محاولة i}\end{pmatrix}$$

وبالنظر إلى الجدول (7.1)

محاولة 0 : (معامل x_4 ، R) = (0 ، -M)

محاولة 1 : (معامل x_4 ، x_3) = (0 ، 4)

محاولة 2 : (معامل x_2 ، x_3) = (4 ، 12)

محاولة ٣ : (معامل x_2 ، x_1) = (12 ، 5)

7.4.3 ملخص طريقة حساب النموذج الأولي الثنائي:

1- احسب كل عنصر في كل عمود في كل قيد باستخدام الطريقة (7.4.1).

2- احسب القيم الثنائية وذلك بضرب المسألة الأصلية (معاملات دالة الهدف الأصلية) في الحل الحالي في معكوس الصف.

3- احسب الطرف الشمالي للعناصر دالة الهدف لمعرفة الفرق بين الطرف الشمالي والطرف اليمين.

7.4.4 التفسير الاقتصادي لمعنى النموذج الثنائي:

Economic Interpretation of Duality

1- عند الوصول إلى الحل الأمثل: (at optimum)

$$\begin{pmatrix}\text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الأوليـة}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الثنائيـة}\end{pmatrix}$$

2- عند أي محاولة أثناء الحل وقبل الوصول إلى الحل الأمثل في المسألة الأولية:

(معامل دالة الهدف للمغيرات x_j) = (الطرف الشمال المقابل للقيود الثنائية) - (الطرف الأيمن المقابل للقيود الثنائية)

وإن هاتين النتيجتين تؤديان إلى ملاحظة اقتصادية مهمة للنماذج الثنائية والمتغيرات الثنائية - ويمكن تمثيل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائية على الصورة التالية.

النموذج الأولي:

$$\text{Max} \quad z = \sum_{J=1}^{n} L_j x_j$$

Subject to:

$$\sum_{J=1}^{n} L_j x_j = b_i \qquad i = 1,2,........,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,........,n$$

النموذج الثنائي:

$$\text{Min} \quad z = \sum_{L=1}^{m} b_i y_i$$

Subject to:

$$\sum_{L=1}^{m} a_j C_j \qquad j = 1,2,........,m$$

$$y_i \geq 0, \qquad i = 1,2,........,m$$

حيث إن المعاملات C_j تمثل الربح لكل وحدة منتجة من النشاط J. وإن كمية الموارد المتاحة I ، b_i والتي خصصت بمعدل a_{ij} وحدة من الموارد I لكل وحدة من المخرجات للنشاط J.

7.5 طريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس (Dual Simplex Method)

من خلال الفصول السابقة التي تناولت طريقة السمبلكس للمسألة الأولى تبين إذا كان $z_j - C_j$ $0 >$ في حالة التعظيم لأي متغير أو أكثر فإن المسألة ليس له الحل الأمثل - وأن الشرط الأساسي لتحقيق الحل الأمثل أن جميع $z_j - C_j \geq 0$ لكل (J).

فإذا نظرنا إلى هذا الشرط من ناحية أو جهة المسائل الثنائية، فإن:

$$z_j - C_j = \sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i - C_j$$

$$\sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i < C_j \quad \text{فإن} \quad z_i - C_j < 0 \quad \text{إذا كان}$$

والذي يعني أن المسألة الثنائية لها حل غير موجود وهذا الشرط يتحقق عندما تكون المسألة الأولية ليس حل أمثل.

ومن جهة أخرى عندما يكون:

$$z_i - C_j < 0$$

فإن

$$\sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i < C_j$$

وهذا يعني أن المسألة الثنائية في دائرة الحل أو طريقها للحل عندما تكون المسألة الأولى لها حل مثالي.

وبناء على النتائج المدونة أعلاه فإنه يقترح حل مسألة البرمجة الخطية من جديد أو من بدايتها مرة ثانية، حيث تكون بداية المسألة ليس حل واضح ولكن في النهاية لها حل مثالي (ويمكن مقارنتها بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي تبدأ لهما في أن لها الحل واضح وفي الأخير لا يوجد لها حل، أما الطريقة التي تختصر الحل تسمى السمبلكس الثنائي (Dual Simplex). والتي تبدأ من عدم وجود حل واضح (Infeasibility)

وتنتهي عندما يتوفر وضوح وجود للمسألة (Feasibility) وعند توفر (Feasibility) عندما يكون الحل الأمثل (Optimality). وهذا النوع من المسائل متوفر جدا في مسائل البرمجة الخطية وله أهمية كبرى، ويمكن أن يكون له عامل مساعد ومباشر في تحليل حساسية متغيرات مسائل LP.

مثال 7.4:

Minimize $z = 2x_1 + x_2$

Subject to:

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 - 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 ,\ x_2 \geq 0$$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من ≤ وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

تصغير Minimize $z = 2x_1 + x_2$

بشرط Subject to:

$$-3x_1 - x_2 + x_3 = -3$$

$$-4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6$$

$$x_1 - 2x_2 + x_5 = 3$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \geq 0$$

البداية بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي توضح أن المتغيرات الاحتياطية (x_3, x_4 , x_5) لا توفر حل واضح مادام المسألة تصغر وكل معاملات دالة الهدف تكون 0 ≤ وهذا يعني أن الحل الأساسي للمسألة هو:

$x_3 = -3$

$x_4 = -6$

$x_5 = 3$

فهو حل مثالي (Optimal) لكن غير منظور أو حل خيالي لأنه لا يحقق شرط $x \geq 0$ للجميع.

∴ المسألة يمكن معالجة حلها بطريق السمبلكس الثنائي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	-2	-1	0	0	0	0
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	2	0	0	1	3

وكما هو معروف في طريقة السمبلكس - أن الطريقة تعتمد على توفر الحل المثالي - وشرط عدم الخيالية في الأرقام - حيث شرط توفر الحل المثالي تضمن توفر الحل المثالي - وعدم الخيالية تضغط على قيم المتغيرات نحو نقاط الحل ومساحته المعروفة بطرق استخدام الرسم (أنظر الفصل الثالث).

شرط عدم الخيالية في قيم الأرقام (Feasibility Condition):

إن المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية يعتبر له أكبر قيمة سالبة.

أما إذا كان المتغير الأساسي غير سالم فإن عمليات التغيير يجب أن تتوقف ويعتبر الحل المنظور (الغير خيالي) مثالي.

شرط وجود الحل المثالي (Optimality):

إن المتغير الذي يدخل من ضمن متغيرات الحل يتم اختياره من ضمن المتغيرات الغير أساسية في الحل (Nonbasic). تأخر النسبة بالنسبة للطرف الشمال أو معاملات الطرف الشمال لـ المعادلة Z إلى المعاملات المقابلة للمتغير المقترح أو المختار خروجه من المتغيرات الأساسية. إهمال أي نسبة مقامها + أو صفر - ويقرر دخول المتغير وفقا للأقل نسبة موجبة، أما إذا كانت كل المقامات صفر أو قيمة موجبة فإن المسألة لها حل خيالي. (unfeasible)

ويعد اختيار المتغير الذي يدخل متغيرات الحل واختيار المتغير الذي يخرج يلي ذلك الحصول على تغيير الصفوف للحصول على المصفوفة الأحادية المعهودة ومنها إلى محاولة أخرى حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو التوقف عن وجود حل.

فبالإشارة إلى الجدول السابق نلاحظ أن المتغير المختار إلى الخروج (6- =) x_4 لأنه يتحصل أكبر قيمة سالبة. أما المتغير التي دخل الحل فيعطي وفقا للجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
معادلة z	-2	-1	0	0	0
معادلة $x_۴$	-4	-2	0	1	0
النسب	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-	-	-

∴ المتغير المرشح للدخول x_2 لأنه مقابل إلى أقل قيمة موجبة ($\frac{1}{3}$) وبتطبيق قواعد المصفوفات للحصول على المصفوفة الأحادية التالية للمتغيرات نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_4	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1

الحل المدرج أعلاه مثالي ولكن خيالي حيث $x_3 = -1$ ، $x_5 = -1$

فإذا اخترنا x_3 لمغادرة المتغيرات الأساسية، فإن x_1 تنطبق عليه الشروط للدخول إلى قائمة المتغيرات الأساسية والتي تعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	2
$x_{١}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1
$x_{٢}$	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	2
$x_{٣}$	0	0	-1	1	1	-1

ومن الجدول الأخير يتضح أن الحل مثالي وغير خيالي.

يعتبر تطبيق طريقة السمبلكس الثنائية ذات استخدام مفيد في تحليل الحساسية. وتظهر هذه الأهمية عندما يضاف قيد جديد للمسألة بعد الحصول على الحل للمسألة بكل الإضافة. فإذا كان القيد (المضاف) لا يحقق شرط الحل الأمثل والغير خيالي فإن المسألة سيبقى لها حل مثالي ولكن خيالي. وبالتالي طريقة السمبلكس الثنائية يمكن استخدامها بدون إعادة الحل من البداية حتى تحقق شروط الحل الأمثل والغير خيالي في عدد قليل من الخطوات الحسابية.

7.6 تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis):

من المعروف بأنه في معظم التطبيقات العملية أن بعض المعلومات لا تكون دقيقة إنما هي مقربة أو محاكاة للواقع الفعلي إلى حد حقيقي جدا، وعليه فإن من المهم أن تجد الحل الأمثل مرة أخرى عند إتاحة المعلومات (Information Availability) الأكثر دقة حتى يعد حل المسائل، وهذا ممكن أن يحصل بدون إعادة حل المسألة الأصلية من البداية. وفي بعض الأحيان أن بعض المتغيرات يحصل عليه تغير أثناء عملية صياغة المسائلة وقبيل بدأ الحل أو في إحدى مراحل الحل.

بالإضافة إلى ذلك أن بعض القيود لا تكون مساوية تماما عند الحصول على الحل الأمثل وبالتالي يجب النظر في هذه الإتاحية من خلال وجود الحل الأمثل، ويمكن أن يضاف قيد آخر بعد حل المسألة نظرا للتطورات التي تحصل في المسألة من البداية.

كل هذه التطورات التي تحصل على نموذج البرمجة الخطية وما شابه ذلك يمكن أن تسمى بتحليل الحساسية . فعلى سبيل المثال:

Minimize $z = c\,x$

S. T.

$A\,x = b$

$x \geq 0$

ولمعرفة أهمية قواعد الحساسية وذلك باعتبار مسألة تطبيقية وذلك على النحو الآتي:

تصغير Minimize $z = 3\,x_1 + 2\,x_2$

تحت شرط S.T

(مواد خام A)	$x_1 + 2\,x_2 \leq 0$
(مواد خام B)	$2\,x_1 + x_2 \leq 8$
(نهاية الطلبية)	$-\,x_1 + x_2 \leq 1$
(نهاية الطلبية)	$x_2 \leq 2$
(شروط عدم السلبية)	$x_1 , x_2 \geq 0$

بعد الحصول على الحل الأمثل ترغب إدارة الإنتاج لتحديد هذه الحالة وفقا للتغيرات الآتية:

-1 يرغب قسم تخطيط الإنتاج لزيادة 2 طن مون المواد الخام B ويقابل هذا زيادة المواد الخام A إلى 3 طن.

-2 إن الاحتياج إلى المنتج x_2 يصبح 3.5 بدلا من 2 كنهاية للطلب.

-3 استخدام الماجة الخام B & A يتطلب دراسة لتقليصها في المادة.

النتيجة من 1 & 2 إلى 0.8 و 1.7 (يقصد بهما معاملات المعادلة (القيد) الأولى المصاحبة (x_1 ، x_2)

-4 معاملات الربح في دالة الهدف وفقا لقسم الحسابات بالمصنع تتغير إلى 2.5 ، 1.5 د.ل/ طن بدلا من 3 ، 2 كما هو في المسألة الأصلية.

-5 من خلال دراسات السوق وجد أنه لا يمكن استخدام كمية من المواد A ، B أكثر من 3 طن بدلا من 6 & 8.

نلاحظ أن قائمة المطالب والتي تشمل تغيير المسألة الأصلية تحتاج إلى زمن كثير لحل المسألة 5 مرات على الأقل. وهذه الحالة يعبر عنها بتحليل الحساسية. والسؤال المطروح هل عندما تحصل هذه المتغيرات يبقى الحل الأمثل - هو الحل الأمثل. والجواب يقع في احتمالين لا غير.

1- الحل الحالي يمكن أن يصبح حل خيالي (Infeasible).

2- الحل الحالي يمكن أن يصبح غير مثالي (Nonoptimal).

وهذان الاحتمالات يعتمد على نتيجة حسابات النموذج الأولي - الثنائي.

وبناء على المناقشة يمكن اتخاذ إجراءات تحليل الحساسية في الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: حل المسألة الأصلية للبرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل بواسطة طريقة السمبلكس.

الخطوة الثانية: وفقا للتغيرات المطلوبة في معاملات المسألة تستخدم طريقة حساب النموذج الأولي - الثنائي.

الخطوة الثالثة: إذا كان جدول المصفوفات الجديد لا يطابق الحل الأمثل. أذهب إلى الخطوة الرابعة. إذا كان الخل الخيالي أذهب إلى الخطوة الخامسة. أما إذا كان الحل المثالي توقف.

الخطوة الرابعة: طبق طريقة السمبلكس الاعتيادية لإيجاد الحل الأمثل للمسألة (الجدول) الجديدة. أو أثبت أن الحل ذو مساحة غير معلومة (Unbounded).

الخطوة الخامسة: طبق طريقة الحل للنموذج الأولي - والثنائي لإيجاد الحل الأمثل الجديد، أو وضح أنه لا يوجد للمسألة حل.

وفقا للخطوات السابقة نتجه الآن لشرح كيفية تطبيق تحليل الحساسية للمسألة المذكورة أعلاه.

المسألة الأولية:

تعظيم Minimize $z = 3\,x_1 + 2\,x_2$

S. T.

$$x_1 + 2\,x_2 \leq 6$$
$$2\,x_1 + x_2 \leq 8$$
$$-\,x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1\,,\; x_2 \leq 0$$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من ≤ وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

Minimize $z = 6\,y_1 + 8\,y_2 + y_3 + 2\,y_4$

S. T

$$y_1 + 2\,y_2 - y_3 \geq 3$$
$$2\,y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$$
$$y_1\,،\,y_2\,،\,y_3\,،\,y_4$$

إن الحل الأمثل للمسألة الأولية يعطي بالجدول التالي:

وكل هذه المعلومات تصلح لبداية تحليل الحساسية كما هو مشار إليه في الخطوة الأولى المذكورة أعلاه.

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
$x_{١}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$x_{٢}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
$x_{٣}$	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

سوف نشير إلى الحل الأمثل بالحل الحالي (Current solution).

7.6.1 حالات الحساسية:

1- التغير في الطرف الأيمن في القيود (b_i)

إذا حصل تغير في القيد الأول للطرف الأيمن من 6 طن إلى 7 طن فما هو التغير الذي يحصل على الحل الأمثل. يمكن معالجته باستخدام طريقة الحل الأولي - الثنائي وذلك على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

وبما أن الطرف الأيمن الجديد مازال غير سالب. هذا يعني أن الحل الأمثل يبقى أمثل ويصبح التغير فقط في قيم $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ ، $x_5 = 2$

أما إذا فرضنا في الطرف الأيمن تغيرت قيم القيد الأول والثاني من 6 و 8 إلى 7 ، 4 فيمكن حساب الطرف الأيمن الجديد على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

ولهذا التغير أثر على قيم x_5 ، x_6 تحولن إلى قيم سالبة وأصبح الحل خيالي.

والآن يجب أن نطبق طريقة النموذج الأولي - الثنائي لمعالجة مشكلة الخيالية وذلك يوضح القيم في الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{23}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	-1	1	1	0	-2
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$

وأن قيمة (z) الجديدة $\frac{23}{3}$ وأن الجدول أعلاه يعطي الحل المثالي حيث معادلة Z تمتاز بأن قيمتها كلها $0 \geq$ لكن الحل خيالي لأن بعض القيم سالبة وبالتالي فإن تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي تعتبر ضرورية لتحقيق المثالية والحقيقة. ووفقا لقواعد الطريقة فإن x_5 تخرج من متغيرات الحل و x_3 تدخل لمتغيرات الحل والتي يعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	٧
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_3	0	0	1	-1	-1	0	2
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0

هذا الجدول يحقق شرط الحل الأمثل والأعداد الحقيقية والحل الأمثل هو:

$x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $z = 7$ حيث أن الحل ذو أعداد حقيقية تحقق في محاولة واحدة فقط.

2- إضافة قيد جديد للمسألة الأولى:

عند إضافة قيد جديد سوف ينتج عنه شرطين لا غيرهما:

1- تحقيق أن الحل الأمثل لا يتغير نتيجة كون القيد مكرر أو داخل منطقة الحل (Nonbinding or redundant).

2- إن القيد لا يحقق الحل الأمثل ولا الأعداد الحقيقية، وبالتالي نحتاج إلى تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي ولتوضيح هذه الحالات نفرض إضافة القيد التالي:

$$x_1 \leq 4$$

وهذا القيد يجب أن يضاف إلى النموذج الأول.

وبما أن $x_1 = \frac{10}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$ من الواضح أنه يحقق القيد المضاف ولا داعي لحصول أي تغير يذكر.

أما إذا افترضنا أن القيد المضاف

$x_1 \leq 3$ من الواضح أنه لا يحقق الحل الحالي $x_1 = \frac{10}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$. لأننا لم نعطي حقيقة الأرقام.

ولحل المسألة بعد إضافة القيد الجديد يجب أن نضيف له المتغير الفائض.

فيصبح القيد على النحو الآتي:

$$x_1 + x_7 = 3 \qquad\qquad x_7 \geq 0$$

من المعروف أنه في الحل الحالي x_1 في الحل الأمثل وبالتعويض في معادلة القيد الأول

$$x_1 - \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \left(\frac{2}{3}\right)x_4 = \frac{10}{3}$$

وبالتالي يصبح القيد الجديد

$$\frac{10}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 - \left(\frac{2}{3}\right)x_4 + x_7 = 3$$

أو

$$\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_7 = -\frac{1}{3}$$

وأن القيمة السالبة في الطرف الأيمن تعطي عدم توفر شرط الأرقام الحقيقي.

فإذا قلنا أن

$$x_3 = x_4 = 0$$

$x_7 = -\frac{1}{3}$ والتي يعرض شرط أن

$$x_7 \geq 0$$

فالجدول التالي يوضح المعلومات الملخصة أعلاه:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{38}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	1	1	1	0	0	3
X_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
x_7	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$

بطريقة السمبلكس الأولي - الثنائي x_7 و x_4 تدخل والتي يعطي التالي الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الحل
z	0	0	1	0	0	0	2	12
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	0	0	0	0	1	3
$x_{٥}$	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$X_{٦}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$x_{٧}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

وهو الحل الأمثل الجديد في محاولة واحدة فقط.

3- التغير في معاملات دالة الهدف:

يمكن شرح هذه الظاهرة مباشرة باستخدام المثال السابق حيث:

$$z = 3\,x_1 + 2\,x_3$$

وتغيرت هذه الدالة

$$z = 5\,x_1 + 2\,x_3$$

فيمكن حساب القيم الثنائية (y_1) (Duol values)

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = (4\,,5\,,0\,,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2, 0\,, 0)$$

والخطوة الثانية بإعادة حساب معاملات المعادلة z بواسطة أخذ الفرق ما بين الطرف الشمالي والطرف اليمين لقيود المسألة الثنائية.

وهذا يعمل على النحو الآتي:

معامل $x_1 = y_1 + 2y_2 - y_3 - 5$

$= 1(1) + 2(2) - (0) - (5) = 0$

معامل $x_2 = 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4$

$= 2(1) + 2 + 0 + 0 - 4 = 0$

معامل $x_3 = y_1 - 0 = 1 - 0 = 1$

معامل $x_4 = y_2 - 0 = 2 - 0 = 2$

معامل $x_5 = y_3 - 0 = 0 - 0 = 0$

معامل $x_6 = y_4 - 0 = 0 - 0 = 0$

وبما أن كل معاملات المعادلة $2 \leq 0$ (تعظيم) وهذا يعني أن دالة الهدف لا تغير من الحل الأمثل الحالي وقيمتها الجديدة.

$$5\left(\frac{10}{3}\right)+4\left(\frac{4}{3}\right)=22$$

فإذا فرضنا أن دالة الهدف تغيرت إلى الحالة التالية:

$$z = 4x_1 + x_2$$

$$\therefore\ (y_1, y_2, y_3, y_4) = (4, 5, 0, 0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0\right)$$

ويمكن التحقق من قيم z الجديدة:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$

وبما أن $x_3 \geq 0$ (قيمة سالبة) فيجب x_3 أن تدخل الحل وتحقق الحل الأمثل بتطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأول - الثاني وكما هو موضح بالجداول التالية:

المحاولة	المتغير	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
1	z	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$
تدخل x_2	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
تخرج x_1	x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	x_5	0	0	-1	1	1	0	3
	x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
	z	0	1	0	2	0	0	16
	x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
	x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
	x_6	0	0	0	0	0	1	2

4- إضافة نشاط جديد (New x)

يمكن المقصود بإضافة متغير جديد وفق المثال الآتي:

تعظيم Maximize

تحت شرط Subject to

$$x_1 + 2\,x_2 + \frac{3}{4}\,x_7 \leq 6$$

$$2\,x_1 + x_2 + \frac{3}{4}\,x_7 \leq ٨$$

$$-\,x_1 + x_2 - x_7 \leq ١$$

$$x2 \leq 2$$

$$x_1\,,\,x_2\,,\,x_7 \geq 0$$

ويعني إضافة متغير مستوي لعمل تغير دالة الهدف. ويمكن اعتبار x_7 بأنها موجودة أصلا في المسألة مع توفر معاملات صفر.

وأول اختبار يجب التفكير فيه اختبار النموذج الثنائي المقابل.

$$\left(\frac{3}{4}\right)y_1 + \left(\frac{3}{4}\right)y_2 - y_3 \geq \frac{2}{3}$$

وبما أن نلاحظ أن x_7 متغير غير أساسي (لا بدخل في الحل) في المسألة الأولية. النموذج الثنائي غير متغير.

∴ فإن معامل x_7 في الحل الأول مثالي.

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)-(1)(0)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن الحل سوف يتحسن إذا x_7 أصبحت (+)

الحل المثالي الحالي يمكن تحسنه بخلق عمود ف الطرف الشمالي للمعادلة z ومعاملها التي تساوي $-\frac{1}{4}$.

والقيد المصاحب مما يحسب على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

أنظر الجداول التالية:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_7	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	1	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
z	0	1	0	1	1	0	0	14
x_7	0	4	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
x_5	0	4	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{25}{3}$
x_6	0		0	0	0	0	1	2

7.7 مسائل:

ضع علامة (✓) أو (✗) على العبارات التالية:

1- المسألة الأولية يجب دائما أن تكون من نوع تعظيم ( )

2- النموذج الثنائي للنموذج الثنائي هو النموذج الأولي ( )

3- إذا كان حل المسألة الأولية غير محدود فإن حل النموذج الثنائي خيالي ( )

4- إذا كان النموذج الأولي حله غير مثالي، فإن النموذج الثنائي يكون خيالي ( )

5- التغير في الطرف الأيمن من القيود يؤثر فقط على قيم الحل في الجدول الذي يعطي الحل الأمثل ( )

6- إضافة نشاط جديد يمكن أن يحسن قيمة دالة الهدف ( )

7- إضافة قيد جديد يحسن من قيمة دالة الهدف ( )

8- إذا تم تغير الطرف الأيمن للقيود ومعاملات دالة الهدف يمكن أن يبطل توفر الحل الأمثل والوجود الحقيقي للقيم العددية ( )

9- في طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي. مسائل البرمجة الخطية تبدأ من وجود حل مثالي ولكن خيالي ( )

10- إذا كانت مسألة البرمجة الخطية الأولية أصلها مسألة تصغير فإن مسألة النموذج الثنائي تكون تعظيم وبإشارة للقيود $\leq$.

11- أكتب النموذج الثنائي للمسائل الآتية:

أ- Maximize $z = 10x_1 + 20x_2$

S. T.

$-x_1 + x_2 \leq -3$

$2x_1 + 3x_2 \leq 5$

$x_1 , x_2 \geq 0$

ب- Maximize $z = 6x_1 - 3x_2$

S. T.

$6x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2$

$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

جـ- Maximize $z = 5x_1 + 6x_2$

S. T.

$x_1 + 2x_2 = 5$

$2x_1 + 3x_2 \geq 3$

x_1 غير محدد الإشارة

$x_2 \geq 0$

د- Maximize $z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

S. T.

$x_1 + x_2 \geq 10$

$x_1 , x_3 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

هـ- Maximize $z = x_1 + x_2$

S. T.

$2x_1 + x_2 = 5$

$3x_1 + x_2 \geq 6$

x_1 , x_2 غير محددي الإشارة

12- إذا علمت أن

Maximize $z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$

S.T.

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$

$x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

حيث b_1 ، b_2 ثوابت ولقيم خاصة لـ b_1 ، b_2 يعطي الحل الأمثل بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	a	7	d	e	150
x_1	1	b	2	1	0	30
s_1	0	c	-8	-1	1	10

حيث a ، b ، c ، d ، c ثوابت، أحسب

أ - قيم b_1 ، b_2 التي تحق الحل الأمثل.

ب- الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

ج- قيم a ، b ، c عند توفر الحل الأمثل.

13- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

Maximize $z = 2x_1 + 3x_2$

S. T.

$2x_1 + 3x_2 \leq 30$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 , x_2 \geq 0$

14- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

Maximize $z = ٥ x_1 + 6 x_2 + 3 x_2$

S. T.

$5 x_1 + 5 x_2 + 3 x_3 \geq 502$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$

$7 x_1 + 6 x_2 + 9 x_3 \geq 30$

$5 x_1 + 5 x_2 + 5 x_3 \geq 35$

$2 x_1 + 4 x_2 - 15 x_3 \geq 10$

$12 x_1 + 10 x_2 \geq 90$

$x_1 - 10 x_3 \geq 20$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

قارن عدد القيود ما بين المسألة الأولية والثنائية.

15- حل المسألة (14) إذا أصبحت دالة الهدف

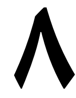
Min $z = 6 x_1 + 8 x_2 + 3 x_2$

الفصل الثامن

مشكلة النقل

يهتم هذا الفصل بموضوع حيـوي ألا وهـو مشـكلة التوزيـع باعتبارها حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية التي يمكـن حلها بواسطة طريقة السمبلكس. ويركز الفصل على طريقـة فوجل التقريبية كتقنية مستخدمة في هذا المجـال. بالإضـافة إلى أن الفصل يسلط الضوء على الطرق المساعدة الأخـرى في حل مشاكل التوزيع.

الفصل الثامن



مشكلة النقل

Transportation Problem

8.1 مقدمة:

تعد مشكلة النقل والتوزيع من بين المشاكل الخاصة بمسائل البرمجة الخطية وكانت محاولة (Cooper) سنة 1953م لوضع نموذج مشكلة التوزيع في صورة مبسطة أولى المحاولات المثمرة في هذا المجال حيث توصلا إلى ما يسمى بطريقة الحجر المتنقل (Stepping stone) المشهورة.

ثم قام (Ferguson) بتهذيب طريقة الحجر المتنقل سنة 1955 لتصبح ما يسمى بطريقة التوزيع المعدلة، وفي أواخر السنة نفسها ظهر ما يسمى بطريقة فوجل التقريبية (Vogel's approximation).

التي تعتبر في واقع الأمر طريقة مساعدة لإحدى الطريقتين السابقتين في حل مشاكل التوزيع، وتعتبر مشكلة التوزيع حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية ويمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس.

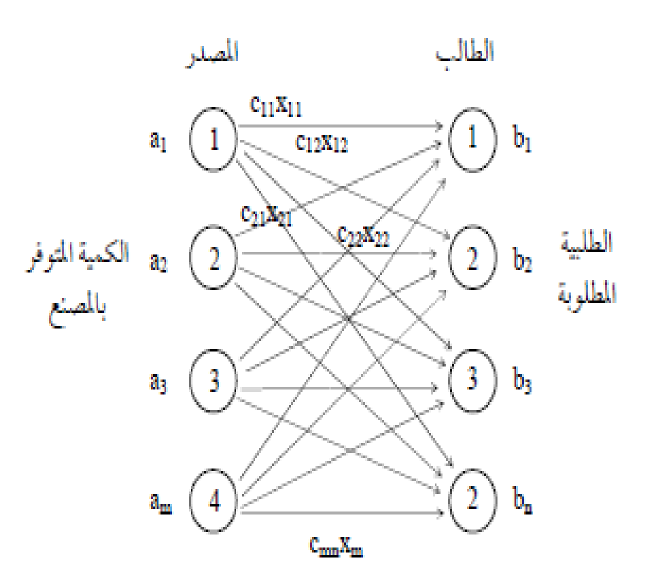
وتوجد طريقة رياضية أخرى لحل مسائل البرمجة الخطية لسهولتها وقلة عملياتها الحسابية والتي تستخدم ي حل هذا النوع من المسائل ويرجع السبب في تسمية هذه المشكلة بالنقل إلى تعدد مراكز الإنتاج وتعدد المناطق التي تصل إليها المنتجات، ويزداد تعقد مراكز الإنتاج وتعدد المناطق التي تصل إليها المنتجات، ويزداد تعقد هذه المشكلة مع تعدد مراكز الاستلام فبزيادة هذه المراكز تزداد البدائل المتاحة مما يعني صعوبة تقييمها للوصول إلى أدنى التكاليف وهو الهدف المطلوب الوصول إليه في مثل هذه

المشكلات، والشكل (8.1) يمثل توضيح مباشر لنموذج مشكلة النقل حيث يظهر فيه الهدف الأساسي لمشكلة النقل أي نقل وحدات من منتج من المخازن أو خطوة الإنتاج إلى عدة مواقع يمكن الاستفادة منها (أماكن استلام).

وذلك في ضوء توفر المعلومات التالية:

1- مستوى توفر المنتج في المصنع ومستوى طلب المواقع المستلمة لهذا المنتج.

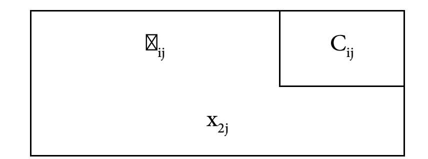
2- تكلفة الوحدة الواحدة من المنتج من مراكز وجودها إلى مراكز أو مواقع استلامها أو استعمالها.



شكل (8.1)

من / إلى	المصدر 1	2	3	4	المتاح
1	2	4	3	7	10
2	5	1	7	3	15
3	2	2	6	6	15
المطلوب	8	12	10	10	40 / 40

نلاحظ أن كل مربع يمكن توضيحه على النحو التالي:



C_{ij} تعني تكلفة النقل للوحدة من المصنع i إلى المخزن j.

[illegible]$_{ij}$ تعني مقدار التغير لصالح الحصول على الحل الأمثل.

x_{2j} تعني عدد الوحدات التي نقلت من المصنع i إلى المخزن j.

ويمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل على النحو الآتي:

إذا فرضنا أن x_{ij} تمثل كمية المواد المنقولة من المصدر I إلى الطالب j .

$$\text{Minimize} \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, x_{ij}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \qquad i = 1, 2, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le b_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

$x_{ij} \ge 0$ لكل j, i

إن مجموع القيود الأولى تمثل مجموع كمية المواد المنقولة من المصدر a بحيث لا تزيد عن المتوفر في المصدر، أما مجموعة القيود الثانية فهي تمثل أن مجموع المواد المنقولة إلى الطالب لا تزيد عن حاجته b وهذا يعني أن $\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ ويسمى هذا النوع من مسائل النقل بالمسائل المتعادلة.

علما بأن المتوفر في الحياة التطبيقية يكون أحيانا أكثر من الطلبية والأمثلة عديدة. ولتوضيح هذه الفكرة نشرح الأمثلة الآتية:

مثال 8.1:

الشركة الوطنية للأسمنت لها مواقع في المنطقة الغربية في الجماهيرية الليبية في كل من الخمس، سوق الخميس، زليكن.

وتوزيع كل من طرابلس - مصراته، فإذا فرضنا أن سعة المواقع الثلاثة هي: 1000، 1500، 1200 طن وأن الطلبية المواقع هي 2300، 2400 طن وأن تكلفة نقل الطن هي 1000 درهم/ كيلو متر.

وأن المسافات بين المدن موضحة في الجدول التالي بالكيلو متر.

	مصراته	طرابلس
الخمس	80	120
سوف الخميس	140	90
زليطن	40	160

ويمكن تحويل جدول الكيلومترات إلى جدول دينارات، على اعتبار أن تكلفة الكيلو متر 1000 درهم.

	مصراته	طرابلس
الخمس	80	120
سوف الخميس	140	90
زليتن	140	160

فإذا فرضنا أن x_{ij} كمية الأسمنت بالطن المنقولة من المصانع إلى الواقع فإن مجموع الإنتاج = (1000 + 1500 + 1200 = 3700 طن).

وأن مجموع الطلبية = (2300 + 1400 = 3700 طن)، وهذا يعني أن كمية الإنتاج تساوي كمية الطلبية ويكون نموذج البرمجة الخطية على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad z = 120\, x_{11} + 80\, x_{12} + 90\, x_{21} + 140\, x_{22} + 160\, x_{31} + 40\, x_{32}$$

S. T.

$$x_{11} + x_{12} = 1000$$

$$x_{1} + x_{22} = 1500$$

$$x_{31} + x_{32} = 1200$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400$$

$xij \geq 0$ لكل J , i

ويمكن تمثيلها بواسطة الجداول

	طرابلس	مصراته	
الخمس	120 x_{11}	80 x_{12}	1000
سوق الخميس	90 x_{21}	140 x_{22}	1500
زليتن	60 x_{31}	40 x_{23}	1200
	1300	1400	

إذا فرضنا أن مصنع سوق الخميس للأسمنت أصبحت سعته الإنتاجية 1300 طن/ يوميا بدلا من 1500 طن وبالتالي تتغير المسألة إلى حالة عدم التوازن، أي أصبح مجموع المصدر المنتج 3500 بدلا من 3700 وبالتالي أصبح هناك نقص في الطلبية الإجمالية قدرة 1500 - 1300 = 200 طن/ يوميا وبالتالي يجب أن نشير إلى إضافة ما يسمي بالمصدر الوهمي أو المصدر الفارغ (Dummy) وبالتالي يمكن جدولة المسألة على النحو التالي:

	طرابلس	مصراته	
الخمس	120	80	1000
سوق الخميس	90	140	1500
زليتن	160	40	1200
المصنع الغير موجود	0	0	200
	2300	1400	

أما إذا كان المصدر يفوق الطلب أو الطلبية الواردة من جميع المصانع وبالتالي يضاف طالب غير موجود (وهمي) فعلى سبيل المثال إذا انخفضت طلبية طرابلس من 2300 إلى 1900 بالتالي يمكن صياغة الجدول على النحو التالي:

	طرابلس	مصراته	مركز الطلبية غير موجود	
الخمس	120	80	0	1000
سوق الخميس	90	140	0	1500
زليتن	160	40	0	1200
	1900	1400	400	

ويقصد بالصفر تكلفة النقل إلى الموقع الوهمي.

8.2 طرق حل مشكلة النقل:

خطوات الحل:

1- احسب الحل الابتدائي للمسألة.

2- احسب المتغير الذي يدخل في الحل من المتغيرات التي خارج نطاق الحل. إذا كانت كل المتغيرات التي خارج نطاق الحل لا يجوز لها الدخول في الحل حسب شروط الحل الأمثل (وفقا للشروط المعروفة بطريقة السمبلكس) توقف ويعتبر هذا الحل (الحل الأمثل) غيره أذهب إلى الخطوة الثالثة.

3- أحسب المتغير الموجود بالحل الذي يحق له الخروج من الحل مع تحقق أنه مغير يحقق شروط الحل الابتدائي ومنه أذهب إلى الخطوة الثانية ولشرح هذه الخطوات نستعرض المثال الآتي:

	1	2	3	4	
1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
المصدر 2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	25
3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
الطالب	5	15	15	10	

8.2.1 طريقة حساب الحل الابتدائي:

من المعروف أن الشرط العام لحل مسائل النقل هو:

$$\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

وهذا أيضا يقرر أن أي مسألة نقل لابد أن تشترط (m + n - 1) معادلات غير معتمدة على بعضها وعليه فإن أي حل ابتدائي بواسطة طريقة السمبلكس يستوجب عدد (m - n - 1) متغير أساسي في الحل.

من الطبيعي أن أي مسألة نقل يمكن صياغتها على نموذج برمجة خطية ومن الممكن استخدام متغيرات فائضة للحصول على الحل الابتدائي.

وللحصول على الحل الابتدائي لمسألة النقل نستخدم طريقة تسمى طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي (North west corner) مع العلم بوجود طريقتين هما البداية بأقل تكلفة ممكنة (minimum cost) وطريقة فوجل التقريبية vogel's approximation

method) وتهتم طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي بوضع أكبر كمية ممكنة ويسمح بها المصدر والطالب إلى قيمة x_{11} وأن الصف العمود الذي يتم تحقيق سعته يشطب من جدول مسألة النقل وهذا يعني أن باقي المتغيرات التي في الصف أو العمود الذي تم شطبه قيمتها صفر.

أما إذا تم تحقيق سعة الصف فقط أو العمود فقط فيتم شطب الصف أو العمود فقط. ولتوضيح هذه الطريقة بالنظر إلى الجدول حسب الخطوات التالية:

1- $x_m = 5$ وبالتالي يتم شطب العمود الأول وبالتالي لا يمكن إضافة أي قيمة لهذا العمود ويتم شطبه.

2- $x_{12} = 10$ وبالتالي يتم شطب الصف الأول ونبقي خمس وحدات في العمود الثاني.

3- $x_{22} = 5$ ويتم شطب العمود الثاني ويبقى 20 في الصف الثاني.

4- $x_{23} = 15$ ويتم شطب العمود الثالث ويبقى 5 في الصف الثاني.

5- $x_{24} = 5$ ويشطب الصف الثاني ويبقى 5 في العمود الرابع.

6- $x_{34} = 5$ ويشطب الصف الثالث والعمود الرابع ويتم الإجراء لتوزيع الكميات في مواقعها.

وبالتالي يعتبر الحل الابتدائي للمسألة على النحو الآتي:

$x_{23} = 15$	$x_{11} = 5$
$x_{24} = 5$	$x_{12} = 10$
$x_{34} = 15$	$x_{22} = 5$

وباقي $x_{ij} = 0$

ويكون إجمالي التكلفة للنقل:

$$5 \times 10 + 10 \times 0 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 5 \times 18 = 410$$ د.ل

وكما هو موضح بالجدول التالي:

	1	2	3	4	
1	5	10	0	0	15
2	0	5	15	5	25
3	0	0	0	5	5

نلاحظ أنه عندما يكون العمود والصف لها كميات مقنعة بالتناول، عليه فإن المتغير الذي يجب إضافته إلى المتغيرات الواقعة في نطاق الحل يجب أن يكون عند المستوى صفر. الجدول التالي يوضح هذه الفكرة.

مثال العمود (2) والصف (2) كمياتهم مقنعة بالتبادل.

فإذا كان العمود (2) تم شطبه فإن x_{23} تصبح في مستوى صفر.

وفي الخطو التي تليها باقي المورد أو المصدر في الصف (2) تكون صفر. أما إذا كان الصف (2) شطب فإن x_{23} تصبح صفر.

	1	2	3	4	
1	5	5			~~10~~ 5
2		5	0		~~5~~ 0
3			8	7	15
	5	~~10~~ 5	8	7	

نلاحظ أن الحل الابتدائي المتوفر الجدولين السابقين يحقق أن عدد المتغيرات الأساسية في دائرة الحل يساوي:

$$m + n -1 = 4 + 3 -1 = 6$$

وهذه ميزة لاستخدام طريقة زاوية الركن الشمالي الغربي.

8.2.2 طريقة حساب تحديد المتغير الذي يدخل لتحسين الحل:

يمكن تحديد المتغير الذي لتحسين الحل بواسطة تطبيق شروط الحصول على الحل الأمثل بطريقة السمبلكس - حيث أن حساب قيمة دالة الهدف يعتمد على طريقة النموذج الأولي - والثنائي وعلاقتهما.

كما ورد في الفصل السابق.

ويمكن استخدام طريقة تسمى المضروبات المرافقة v_i , u_i لكل من الصف I والعمود j لجدول مسألة النقل لكل متغير أساسي x_{ij} للحل الحالي بحيث أن المضروبات v_i , u_i يجب أن تحقق المعادلات التالية لكل x_{ij} $\quad u_i + v_i = c_{ij}$

وعدد هذه المعادلات يساوي (m + n - 1) علما بأن الغير معلوم هو عددهم (m+n).

ويمكن حساب v_i , u_i بوضع قيمة اختيارية لأحد المضروبات على سبيل المثال لو فرضنا أن (u_i = 0) وبالتالي يمكن حل معادلات عددها على سبيل المثال لو فرضنا أن ($u_i = 0$) وبالتالي يمكن حل معادلات عددها (m + n - 1) ومتغيرات عددها (m + n - 1) وبالتالي يمكن اختيار أي متغير غير أساسي في الحل x_{pp} بواسطة المعادلة التالية:

$$c_{p9} = u_p - v_9 - c_{p9} \quad \text{لكل متغير } x_{p9}$$

فعلى سبيل التوضيح في الجدول السابق يمكن حساب قيم المتغيرات الأساسية وهي:

x_{11}: $u_1 + v_1 = c_{11} = 10$

x_{12}: $u_1 + v_2 = c_{13} = 0$

x_{22}: $u_2 + v_2 = c_{22} = 7$

x_{23}: $u_2 + v_3 = c_{23} = 9$

x_{24}: $u_2 + v_4 = c_{24} = 20$

x_{34}: $u_3 + v_4 = c_{34} = 18$

بفرض أن $u_1 = 0$ يمكن حساب باقي المضروبات.

$v_1 = 10$ $u_2 = 7$

$v_2 = 0$ $u_3 = 5$

$v_3 = 2$

$v_4 = 13$

ويمكن حساب المتغيرات غير الأساسية على النحو الآتي:

x_{13}: $\bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 - 2 - 20 = -18$

x_{14}: $\bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 -11 = 2$

x_{21}: $\bar{c}_{21} = u_1 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5$

x_{31}: $\bar{c}_{31} = u_2 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = 15$

x_{32}: $\bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 10 - 14 = -9$

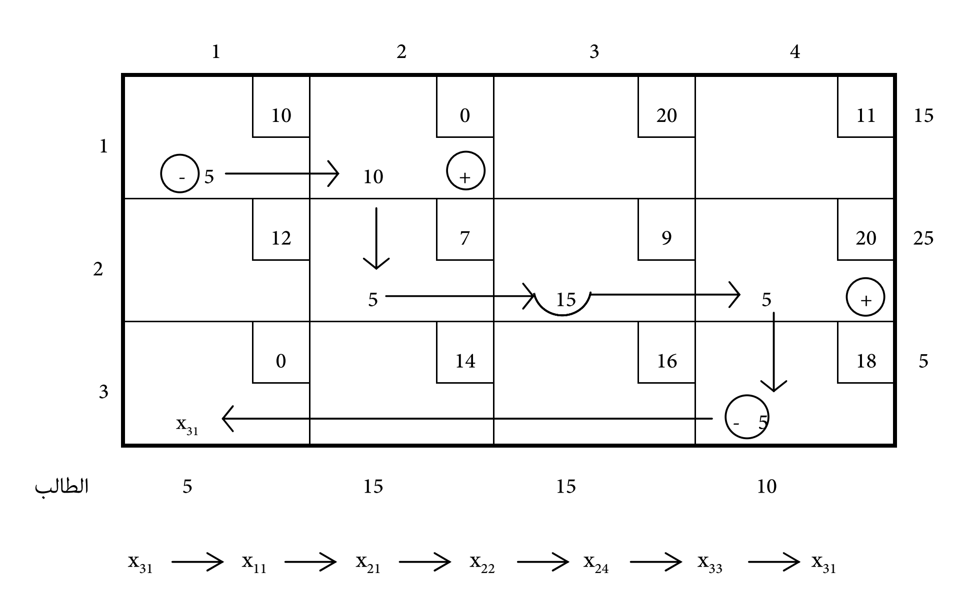
x_{33}: $\bar{c}_{33} = u_4 + v_3 - c_{33} = 5 + 2 - 16 = -9$

وبما أن x_{31} لها أكبر قيمة موجبة $\bar{c}_{p9}$.

∴ تختار x_{31} للدخول في المتغيرات الأساسية وفقا لهذه القاعدة.

8.2.3 طريقة حساب تحديد المتغير الذي يخرج من الحل الأساسي:

وفقا لقواعد السمبلكس لاختيار المتغير الذي يخرج وذلك باستخدام أقل نسبة موجبة يمكن تصميم شبكة مغلقة للمتغير المطلوب دخوله في الحل (x_{31}) في هذه المحاولة كما هو موضح في الجدول التالي:



$x_{31} \longrightarrow x_{11} \longrightarrow x_{21} \longrightarrow x_{22} \longrightarrow x_{24} \longrightarrow x_{33} \longrightarrow x_{31}$

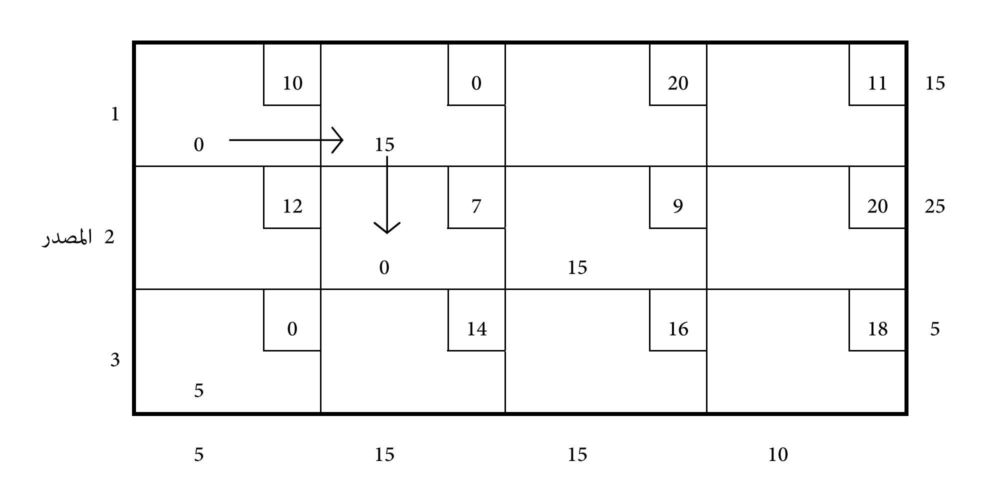
نلاحظ في الجدول السابق أنه إذا كان x^{31} المتغير إلى يدخل يزداد مقدار وحده هذا يعني أن x_{11} ينقص 1 و x_{24} يزيد 1 وأخيرا x_{34} ينقص 1، ويمكن تلخيص الإجراء بوضع + ، - في كل زاوية مناسبة بحيث أن هذه الإضافة تحفظ شروط المورد والطالب ثابتة حسب المسألة الأولى.

∴ يمكن اختيار المتغير الذي يخرج من الحل من خلال المتغيرات الواقعة في الزوايا بحيث ينقص عندما يدخل x_{31} ويزداد بمقدار أكثر من الصفر.

ومن الجدول السابق نلاحظ أن المربعات التي تحتوي - هي x_{11} ، x_{23} ، x_{34} هي متغيرات أساسية في الحل وسوف تنقص عندما x_{31} يزيد.

ويمكن اختيار المتغير الذي يخرج وهو المتغير الذي يحتوي على أقل قيمة حتى يصل إلى الصفر ومنها إلى الناقص. وفي هذا المثال المتغيرات الثلاثة التي تنقص - هي x_{11} ، x_{23} ، x_{34} ولها نفس القيمة (=5) وفي هذه الحالة يمكن اختيار أي واحد منهم.

فمثلا لو اخترنا x_{34} فبالتالي تصبح قيمة $x_{31} = 5$ وأن كل المتغيرات التي لها إشارة + تزيد 5 والتي لها إشارة - تنقص 5 كما في الجدول التالي



المصدر					
1	(10) 0 →	(0) 15 ↓	(20)	(11)	15
2	(12)	(7) 0	(9) 15	(20)	25
3	(0) 5	(14)	(16)	(18)	5
	5	15	15	10	

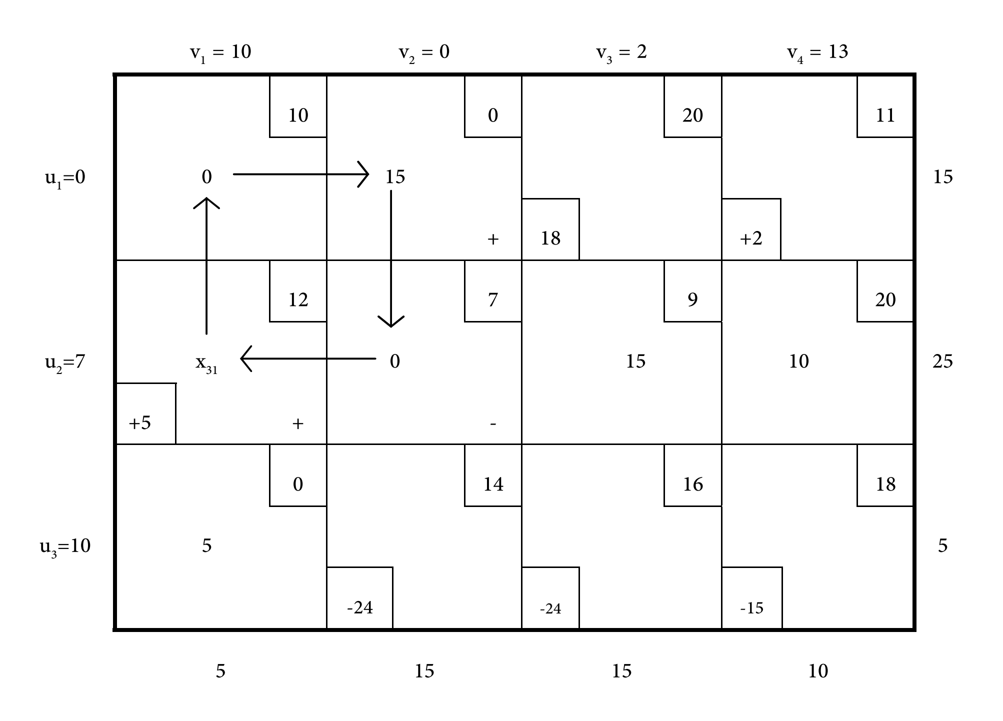
ومن خلال الجدول الموضح أعلاه فإن إجمالي التكاليف يساوي:

$$\cdot \times 10 + 15 \times 0 + 0 \times 7 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 = 355 \text{ L.D}$$

حيث أن التكاليف هذه تختلف عن التكاليف السابقة بالآتي:

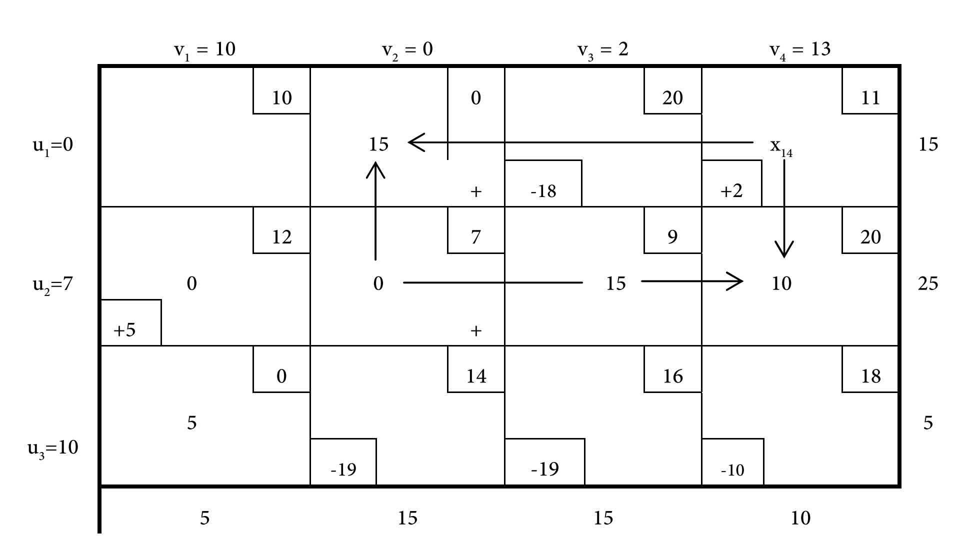
$$410 - 335 = 75 \text{ L.D}$$

وبما أن الحل في المحاولة الثانية موضح في الجدول السابق ويمكن اختيار هذا الحل هو الحل الأمثل باختيار الحصول على المضروبات الجديدة بإجراء العمليات الحسابية لـ x_{21} سوف يدخل الحل والذي يحتوي على أكبر قيمة موجبة $\bar{C}_{pg}$ كما هو موضح بالجدول التالي:



	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1=0$	10 0 →	0 15 ↓ +	20 18	11 +2	15
$u_2=7$	12 ↑ x_{31} +5 +	7 ← 0 -	9 15	20 10	25
$u_3=10$	0 5	14 -24	16 -24	18 -15	5
	5	15	15	10	

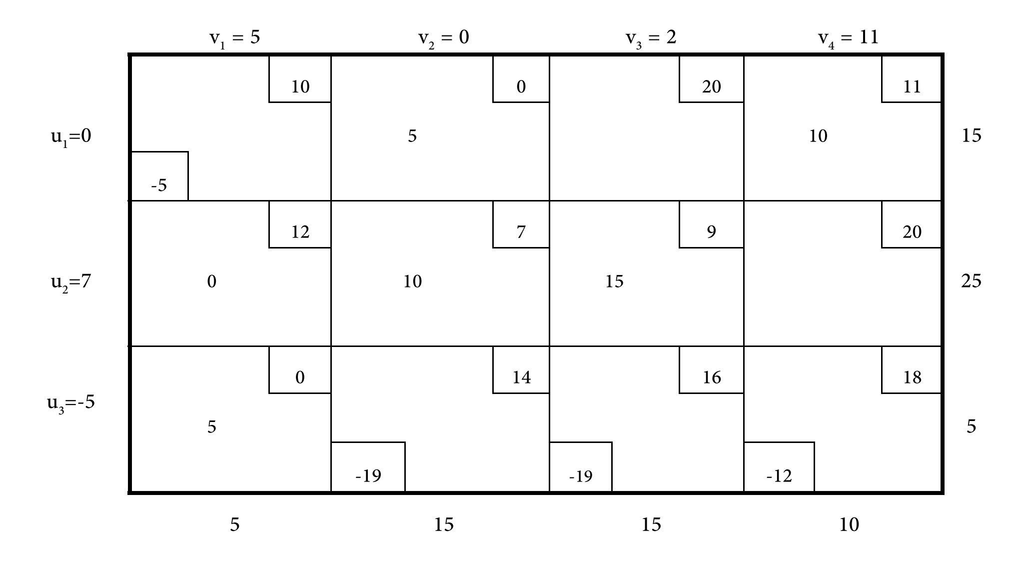
ونلاحظ أن الشبكة المغلقة للمتغير x_{21} تعطي بأن x_{11} أو x_{22} يمكن أن تخرج من أساسيات الحل وباختيار عشوائي نفترض أن تخرج x_{11} وبناء الجدول التالي يوضح أن الحل الذي يعين المتغيرات الأساسية من الجدول السابق (x_{21}) تدخل الحل و (x_{11}) تغادر الحل وأن قيم المضروبات u_1 ، v_i، $\bar{C}_{pg}$ تحسب من جديد كما هو موضح بالجدول التالي:



	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1=0$	[10]	[0] 15 +	[20] -18	[11] x_{14} +2	15
$u_2=7$	[12] 0 +5	[7] 0 +	[9] 15	[20] 10	25
$u_3=10$	[0] 5	[14] -19	[16] -19	[18] -10	5
	5	15	15	10	

ويمكن من الجدول السابق استخراج الحل الجديد على الجدول التالي وبما أن كل $\bar{C}_{pq}$ غير موجبة.

∴ فإن الحل يتحقق في الجدول التالي:



	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1=0$	[10] -5	[0] 5	[20]	[11] 10	15
$u_2=7$	[12] 0	[7] 10	[9] 15	[20]	25
$u_3=-5$	[0] 5	[14] -19	[16] -19	[18] -12	5
	5	15	15	10	

∴ يمكن صياغة الحل النهائي وذلك:

بإرسال 5 وحدات من 1 إلى 2 بكلفة 5 x 0 = 0

بإرسال 10 وحدات من 1 إلى 24 بكلفة 10 x 11 = 110

بإرسال 10 وحدات من 2 إلى 2 بكلفة 10 x 7 = 70

بإرسال 15 وحدات من 2 إلى 3 بكلفة 15 x 9 = 135

بإرسال 5 وحدات من 3 إلى 1 بكلفة 5 x 0 = 0

وبالتالي يكون التكلفة الإجمالية = 315 د.ل.

8.2.4 طرق تحسين الحل الابتدائي:

أ - طريقة أقل تكلفة ممكنة (Least cost method):

تعتمد خطوات هذه الطريقة على وضع أكبر كمية ممكنة لأقل تكلفة ممكنة في جميع مربعات الجدول أي يتم أولا نقل كمية من مركز إنتاجي إلى مركز توزيعي تكون فيه تكاليف النقل أقل مستوى مقارنة بتكاليف نقل أي كمية من أي مركز إنتاجي لأي مركز تسويقي ثم يتم النقل للمخازن ذات الكلف الأعلى تدريجيا.

	1	2	3	4	
1	10 0	0 15	20	11 0	15
2	12	7	9 15	20 10	25
3	0 5	14	16	18	5

وتكون التكلفة الإجمالية

$$\text{١٥} \times 9 + 20 \times 10 + 11 \times 0 + 0 \times 15 + 10 \times 0 + 0 \times 5 = 335$$ د.ل

ب - طريقة فوجل التقريبية (Vogel's approximation):

ويطلق عليها طريقة (VAM) أو طريقة الجزاء (Penalty) أو طريقة كلفة الفرصة البديلة (Alternative cost method).

وتعتبر هذه الطريقة أفضل الطرق لتحقيق الحل الابتدائي لمسائل النقل وأحيانا تؤدي هذه الطريقة إلى تحقيق الحل الأمثل.

وتتخذ هذه الطريقة الخطوات التالية:

1- حساب التكلفة الفرضية (Opportunity cost) لكل صف أو عمود وذلك بطرح أقل تكلفة نقل الكلفة التي تليها في كل صف أو عمود.

2- تعريف الصف أو العمود الذي يصاحب أكبر عقوبة، اختيار أحدهما إذا تساوى (أي اختيار أعلى كلفة فرضية في أي صف أفقي، أو عمودي حيث أن عدم اختيار هذه الفرصة يعني تحمل الشركة لكلف أكثر منها وتحمل الخسارة).

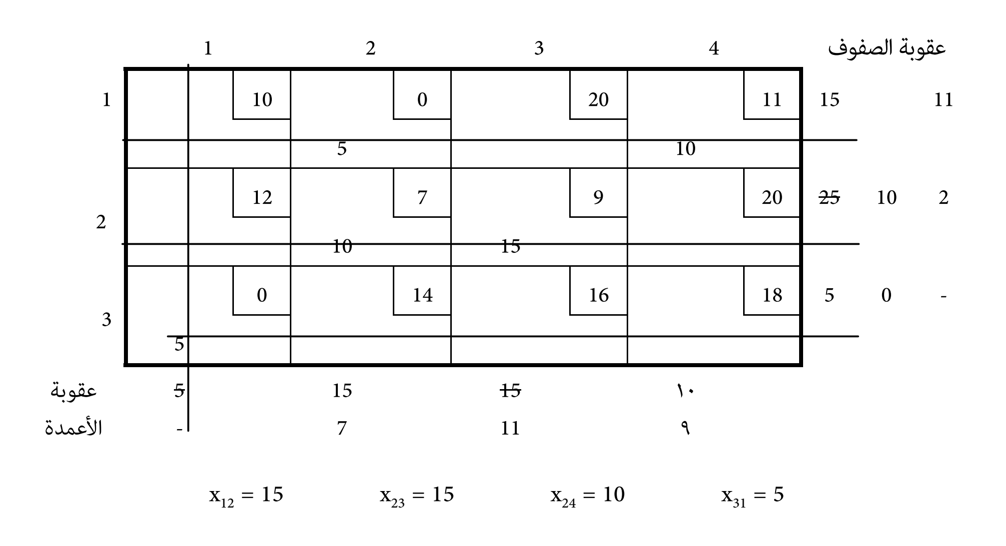
3- أ - إذا لم يوجد صف أو عمود غير مشطوب توقف.

ب- إذا تبقى صف أو عمود موجب ولم يشطب بالطريقة السابقة احسب الحل بواسطة طريقة أل تكلفة ممكنة.

ج- إذا كانت جميع الصفوف والأعمدة الغير مشطوبة لها مورد صفر أو طالب صفر - أكمل الحل بواسطة أقل تكلفة ممكنة.

د- إذا حصل خلاف ما ذكر أعلاه - احسب العقوبة وارجع الخطوة رقم (2) والمثال التالي يوضح طريقة الحل بالطريقة المذكورة أعلاه.

	1	2	3	4	عقوبة الصفوف
1	10	0	20	11 (10)	15
2	12	7	9	20	25
3	0 (5)	14	16	18	5
عقوبة الأعمدة	5	15	15	١٠	
	10	7	7	٧	



	1	2	3	4	عقوبة الصفوف		
1	10	0 (5)	20	11 (10)	15		11
2	12	7 (10)	9 (15)	20	~~25~~	10	2
3	0 (5)	14	16	18	5	0	-
عقوبة الأعمدة	~~5~~	15	~~15~~	١٠			
	-	7	11	٩			

$x_{12} = 15$ $x_{23} = 15$ $x_{24} = 10$ $x_{31} = 5$

التكلفة الإجمالية = 335 د.ل.

8.3 نموذج التعيين (The Assignment Model)

وهو حالة خاصة في حالات أسلوب النقل الذي يستخدم في تخصيص أوامر إنتاج كل آلات وأوامر على عمل وهكذا..

يهتم نموذج التعيين بحالة أن عدد الوظائف m لبعض المنتجين يمكن تعيينهم لبعض الآلات n.

وظيفة I $(I = 1, 2, \ldots, m)$ تخصيص للآلة j

$(j = 1, 2, \ldots, n)$ وتحتاج إلى تكلفة c_{ij}.

ويظل الهدف لتعيين وظائف i للآلات j بحيث يتحقق أقل تكلفة إجمالية ممكنة (تصغير التكلفة) وتسمى هذه المسألة بمسألة التعيين.

الآلات

		1	2	……….	n	
	1	C_{11}	C_{12}	……….	C_{2n}	1
	1	C_{11}	C_{12}		C_{2n}	1
الوظائف	⋮	⋮				`
	1	C_{m1}	C_{m2}	……….	C_{mn}	1
	1	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	1

يرجع صياغة هذه المسألة إلى حالة خاصة لمشكلة النقل حيث الوظائف تعبر عن المصدر والآلات المستقبل وأن كمية الصادرات من مصدر تساوى 1 وهذا يعني أن $a_i=1$ لكل I وبالمثل طلبية المستقبل أو الطالب $b_j = 1$ لكل J . وهذا يناصره أن تكلفة كل تخصص هو c_{ji}. وقبل أن نبدأ حل المسألة بواسطة طريقة مشكلة النقل أو نموذج النقل يجب أن نشير إلى أن

m < n أو m > n

m = n

وعليه يمكن صيانة نموذج التعيين بصفة عامة رياضيا على النحو الآتي:

$$xij = \begin{cases} 0 & \text{إذا كانت الوظيفة j لم تخصص إلى الآلة i} \\ 1 & \text{إذا كانت الوظيفة j تخصصت إلى الآلة i} \end{cases}$$

يعني أن:

$$\text{Minimize} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \; x_{ij}$$

S. T.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad I = 1, 2, ... n$$

$$\sum_{ji=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad J = 1, 2, ... m$$

$x_{ij} = 0$ أو $x_{ij} = 1$

ولتوضيح نموذج التعيين وذلك بالمثال العددي التالي:

	1	2	3	
1	0	20	9	1
الوظائف 2	14	10	12	1
3	15	13	16	1
	1	1	1	

في قاعدة الحل أن الحل الأمثل لمسألة التعيين يبدأ ثابت إذا أضيف ثابت أو طرح من أي صف أو عمود كقاعدة جبرية. فمثلا إذا طرحت ثابت قيمة p_i ، q_i من كل صف I أو عمود J فإن المعامل الجديد تتكلفه c_{ij} يصبح

$$\overline{c}_{ij} = c_i j - p_i - q_i$$

وهذا التعديل سوف يؤدي إلى دالة هدف جديدة هي :

$$\begin{aligned} z' &= \sum_j \sum_i c'_{ij} \times ij = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_i) \times x_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_j p_i \sum x_{ij} \sum_j q_i \sum x_{ij} \end{aligned}$$

وبما أن

$$\sum x_{ij} = \sum x_{ij} = 1$$

وبالتالي:

z' = z - constant (ثابت)

وهذا يعطي أن تصغير z يساوي تصغير z'

ومنه نستنتج أنه ممكن إنشاء مصفوفة c'_{ij} تدخلاتها كلها وأصفار وتعطي حل ابتدائي والحل الابتدائي يأخذنا إلى الحل الأمثل لأن كل التكاليف كلها $0 \geq$.

ولتوضيح هذا المبدأ نستدل بالمثالي العددي وذلك بطرح أقل قيمة c'_{ij} في كل صف أو عمود من الصف أو العمود الموجودة فيه ونتحصل على الجدول التالي كخطوة أولية c'_{ij}

(سوف يكون هناك في كل صف على الأقل صفرا واحدا. ونفس الشيء بالنسبة لكل عمود، وبذلك نضمن وجود صفر واحد في كل عمود على الأقل وتكون النتيجة كما يلي:)

		1	2	3	
	1	0	2	4	$P_1 = 5$
$\lvert c'_{ij} \rvert$	2	4	0	2	$P_2 = 10$
	3	2	0	3	$P_3 = 13$

ويمكن الحصول على إحضار أكثر تطبيق القاعدة على العمود الثالث بطرفي

		1	2	3
	1	[0]	2	٢
$\lvert c'_{ij} \rvert$	2	4	0	[0]
	3	2	[0]	0

وتعني □ أن هذا الحل حل ابتدائي وبالتالي يتم التخصيص على النحو الآتي:

(1 ،1) ، (2،3) ، (3،2)

(الوظيفة الثالثة للآلة رقم 2)، (الوظيفة الثانية للآلة رقم 3)، (الوظيفة الأولى للآلة رقم 1).

والتكلفة الإجمالية 5 + 12 + 13 = 30 د.ل

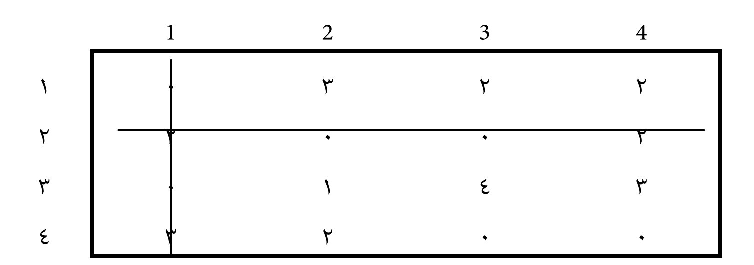
في هذا المثال تحقق الحل الأمثل في خطوة واحدة ولا يحصل هذا في كل المسائل ولتوضيح نلاحظ في المثال التالي:

	1	2	3	4
١	1	4	6	3
٢	9	7	10	9
٣	4	5	11	7
٤	8	7	8	5

باتخاذ نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول التالي:

	1	2	3	4
١	٠	٣	٢	٢
٢	٢	٠	٠	٢
٣	٠	١	٤	٣
٤	٣	٢	٠	٠

لحل هذه المسألة يرسم خطوط بأقل عدد ممكن لتغطية كل العدد (صفر). فإذا تركت عناصر بدون خطوط - يعني أن هذا الحل ليس الحل الابتدائي أو الحل الأمثل كما هو موضح بالجدول التالي:



	1	2	3	4
١	٠	٣	٢	٢
٢	٢	٠	٠	٢
٣	٠	١	٤	٣
٤	٣	٢	٠	٠

	1	2	3	4
١	٠	٣	٢	٢
٢	٣	٠	٠	٢
٣	٠	٠	٣	٢
٤	٤	٢	٠	٠

الخطوة هذه يطرح أقل عنصر غير مخطوط عليه (1=) في الجدول الذي به خطوط تحصل على الجدول الأخير، وبالتالي الحل يكون

(4،4) (3،2) ، (2،3) (1،1).

ويكون التكلفة الإجمالية = 1 + 10 + 5 +5 = 21 د.ل

مثال 2:

الزبائـن

موقع العمل	A	B	C	D	E
١	10	5	9	18	11
٢	13	19	6	12	14
٣	3	2	4	4	5
٤	18	9	12	17	15
5	11	6	14	19	10

إن المصفوفة أعلاه توضح تخصيص الزبائن من A ← E إلى المواقع 1 - 5 والمطلوب اتخاذ قرار تخصيص كل زبون واحد إلى موقع واحد بأقل تكلفة ممكنة حيث أن المعلومات داخل الجدول تعني تكليف التعيين.

الحل:

1- اختيار أل تكلفة في كل صف.

	A	B	C	D	E	أقل تكلفة
١	10	5	9	18	11	5
٢	13	19	6	12	14	6
٣	3	2	4	4	5	3
٤	18	9	12	17	15	9
5	11	6	14	19	10	6

2- أطرح أقل قيمة في الصف من كل صف وذلك على النحو الآتي:

	A	B	C	D	E
١	٥	٠	٤	١٣	٦
٢	٧	١٣	٠	٦	٨
٣	١	٠	٢	٢	٣
٤	٩	٠	٣	٨	٦
٥	٥	٠	٨	١٣	٤

3- اختيار أقل عدد من الخطوط الأفقية والرأسية لتغطية عدد صفر.

	A	B	C	D	E
١	٥	٠	٤	١٣	٦
٢	٧	١٣	٠	٦	٨
٣	١	٠	٢	٢	٣
٤	٩	٠	٣	٨	٦
٥	٥	٠	٨	١٣	٤

N=2

4- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف والأعمدة أنتقل إلى الخطوة القادمة (N = 2 < 5).

4- اختار أقل قيم لكل عمود كما هو موضح بالجدول التالي:

	A	B	C	D	E
١	٥	٠	٤	١٣	٦
٢	٧	١٣	٠	٦	٨
٣	١	٠	٢	٢	٣
٤	٩	٠	٣	٨	٦
٥	٥	٠	٨	١٣	٤
أقل قيم هي:	1	0	0	2	3

6- أطرح أقل قيم في أي عمود من الأعمدة. كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	4	0	4	11	3
2	6	13	0	4	5
3	0	0	2	0	0
4	3	0	3	6	3
5	4	0	8	11	1

7- اختار أقل عدد من الخطوط الرئيسية أو العمودية لتغطية عدد صفر كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	4	0	4	11	3
2	6	13	0	4	5
3	0	0	2	0	0
4	3	0	3	6	3
5	4	0	8	11	1

N=3

8- إذا كان عدد الخطوط أقل من عدد الأعمدة والصفوف أنتقل إلى الخطوة القادمة.

9- عرف العناصر غير المغطاة في المصفوفة السابقة واختار أقل قيمة لأي عنصر غير مغطي.

10- أ - اطرح أقل عنصر غير مغطى من كل عنصر غير مغطى.

ب- أطبق أقل عنصر غير مغطاة إلى كل عنصر مغطى بخطين.

ج- لا تغير العناصر المغطاة بخط واحد، كما هو موضح بالجدول التالي:

	A	B	C	D	E
1	3	0	3	10	٢
2	6	4	0	4	5
3	0	1	2	0	0
4	7	0	2	5	2
5	3	0	7	10	0

11- اختار أقل عدد من الخطوات يغطي العنصر صفر في المصفوفة

	A	B	C	D	E
1	3	0	3	10	٢
2	6	4	0	4	5
3	0	1	2	0	0
4	7	0	2	5	2
5	3	0	7	10	0

عدد الخطوط N=4

12- إذا كان عدد الخطوط الرئيسية والأفقية أقل من عدد صفوف المصفوفة أو أعمدتها. كرر الخطوة 9 ، 10 ، 11 حتى يصبح عدد الخطوط الرئيسية والأفقية يساوي عدد الصفوف أو الأعمدة كما هو موضح بالجدول الآتي:

	A	B	C	D	E
1	0	0	3	7	2
2	3	4	0	4	5
3	0	4	5	0	3
4	4	0	2	5	2
5	0	0	7	10	0

عدد الخطوط لتغطية الصفر N=5

13- الحل المثالي يتحقق عندما يصبح عدد الخطوط يساوي عدد الأعمدة

∴ الحل المثالي:

	A	B	C	D	E
1	[٠]	0	3	7	2
2	3	4	[٠]	4	5
3	0	4	5	0	3
4	4	[٠]	2	5	2
5	0	0	7	10	[٠]

14- تحسب التكاليف المصاحبة للتخصيص وفق الآتي:

التخصيص	التكاليف (وفق الجدول الأساسي)
A-1	10
C-2	6
D-3	4
B-4	9
E-5	10
المجموع	39

8.4 مسائل:

1- أوجد حل الجداول التالية باستخدام طريقة النقل بالطرق التالية:

أ - طريقة زاوية الشمال الغربية (North west corner).

ب- طريقة فوجل التقريبية (Vogel's Approximation).

	1	2	3	
1	0	2	1	5
2	2	1	5	10
3	5	4	3	5
	5	5	10	

	1	2	3	
1	0	4	2	8
2	2	3	4	5
3	1	2	0	6
	7	6	6	

2- حل المسألة الآتية الغير متعادلة بطريقة فوجل.

5	1	0	20
3	2	4	10
7	5	2	15
9	6	0	15
5	10	15	

4- حل المسألة التالية بواسطة طريقة النقل:

الفندق	A	B	C	D	E	سعة الفندق
	الزبائن					
1	23	27	32	30	43	١١٥
2	15	15	20	16	35	65
3	14	19	25	21	37	100
4	35	44	47	45	60	35
احتياجات الزبائن	25	100	70	65	45	

4- يمكن تغذية خمسة زبائن بواسطة خمسة مواني مختلفة وتكلفة النقل من كل سيناء لكل زبون موضحة على النحو الآتي. والمطلوب حساب أقل تكلفة إجمالية ممكنة لتخصيص كل زبون لكل ميناء.

المواني	A	B	C	D	E
	الزبائن				
1	2	5	4	3	7
2	2	6	5	4	6
3	5	6	5	3	7
4	3	4	7	2	4
5	7	5	6	2	1

5- شركة النقل لشخصن البضائع يجب أن ترسل شاحنات إلى كل المدن. ومن المتوفر 6 شاحنات للنقل إلى مناطق مختلفة في البلد. والمصفوفة التالية توضح التكاليف المصاحب لكل شاحنة متوفرة لكل المدن الأربع المخصصة لاستقبال البضائع. وترغب الشركة في تقليل التكاليف لتخصيص كل شاحنة إلى مدينة معينة من المدن الأربع.

رموز الشاحنات	المـــدن ١	٢	٣	٤
A	٣	٨	٢	٦
B	7	1	4	5
C	3	8	5	8
D	6	4	3	6
E	5	2	5	3
F	5	7	6	2

6- إذا عرفنا أن 4 فنيين في تخصيصهم إلى أربعة آلات وأن التكلفة المصاحبة للتخصيص موضحة بالمصفوفة التالية. مع مراعاة أن الفني 1 لا يخصص إلى الآلة 3 وأن الفني 3 لا يخصص للآلة 4. أوجد الحل الأمثل للتخصيص.

الفنيين	الآلات 1	2	3	4
1	5	5	-	2
2	7	4	2	3
3	9	3	5	-
4	7	2	6	7

7- حل مسألة النقل الآتية باستخدام الطرق التالية:

أ - زاوية الشمال الغربي.

ب- طريقة أقل تكلفة.

ج- فوجل.

ثم قارن بين حل الطرق الثلاث.

1	2	6	7
0	4	2	12
3	1	5	11
10	10	10	

5	1	8	12
2	4	0	14
3	6	7	4
9	10	11	

8- ثلاثة مصانع تصفية زيوت النفط سعتها على التوالي 5 ، 6 ، 8 مليون جالون من الوقود وتمون ثلاثة مواقع طلبيتها اليومية 4 ، 8 ، 7 مليون جالون - وينقل النقل إلى هذه المواقع من خلال أنابيب - وتقدر تكاليف النقل اعتمادا على طول خطوط النقل بمبلغ قدرة 1 دينار/100 جالون في الكيلومتر الواحد. وتقدر المسافات بين مصانع التصفيد وأماكن استخدام الزيت وفقا للمصفوفة التالية: صنع المسألة بواسطة طريقة النقل.

	أماكن استهلاك الزيت		
	1	2	3
1	120	180	-
مصفات الزيت 2	300	100	80
3	250	250	120

الفصل التاسع

برمجة الأعداد الصحيحة

تـأتي الأمثلـة التطبيقيـة المتضـمنة في هـذا الفصـل لتوضـح بأسـلوب مبسـط ومتعمـق معـا أبـرز الطـر والاجتهـادات المختلفة التي قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجـة الخطيـة ذات الأعداد الصحيح للمسائل ذات الطبيعة الخاصة.

الفصل التاسع

٩

برمجة الأعداد الصحيحة

Integer Programming

9.1 مقدمة:

تهتم البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة بحيث تصبح كل قيم المتغيرات عند الحل الأمثل أعداد صحيحة أو جزء منها أعداد صحيحة مع فرضية أن النتائج كلها موجبة وبالتالي يطلق عليه أحيانا البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة الصافية أو مخلوطة وهذا يعتمد على الشروط الأولية لحل المسألة.

إن مشكلة البرمجة العددية هي في الحقيقة مشكلة برمجة خطية فقدت صفة الخطية لوجوب التخلي عن شروط القابلية للتجزئة بضرورة اتخاذ المتغيرات أو بعضها لقيم غير كسرية وقد تكو مشكلة البرمجة العددية مشكلة مختلطة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ بعض المتغيرات قيم غير عشرية بينما البعض الآخر يمكن أن يتخذ قيما كسرية وأن تكون مشكلة برمجة عددية صرفة بمعنى أنه يلزم أن تتخذ كل المتغيرات قيما كسرية.

وهناك طرق مختلفة واجتهادات عديدة قدمها الباحثون لحل مسائل البرمجة الخطية ذات الأعداد الصحيحة للمسائل ذات الطبيعة الخاصة.

فمثلا عدد السيارات التي تنتج يوميا أو أجهزة الإذاعة المرئية ... الخ التي يمكن أن تنتج منها كسر عشري لأنه لا يوفي بالوظيفة الأساسية لإنتاجها، وتوجد حالات خاصة من استخدام البرمجة الخطية الصحيحة التي يتخذ فيها القرار (نعم) أو (لا) وتسمى هذه الحالات الخاصة (1،0) حيث تعني 0 (لا) ، 1 (نعم) وبمعنى آخر أنك تختار هذا المشروع أو لا تختاره، تختار هذا الطريق أو لا تختاره، نستخدم هذا النوع من

الآلات أو لا تختاره، ولتوضيح بعض المشاكل العملية التي يستخدم فيها نظام البرمجة الخطية الصحيحة يمكن التدليل ببعض الأمثلة فيما بعد.

مثال 1:

من المعروف أن أي تخطيط إنتاجي يحتوي على N منتوجات تكاليف الإنتاج للمنتج J والتي يمكن أن تحتوي على تكاليف ثابتة K_1 والتي لا تعتمد على كمية الإنتاج وتكاليف متغيرة C_j للوحدة المنتجة فإذا كان x_j مستوى الوحدات المنتجة للمنتج J فإن تكاليف المنتج من المعطيات السابقة.

$$C_1(x_j) = \begin{cases} k_j + c_i x_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases}$$

إن دالة الهدف يمكن أن تصاغ إلى النحو الآتي:

$$\text{Minimize} \qquad z = \sum_{j=1}^{N} c_j(x_j)$$

وأن الخاصية x_j الغير خطية تأتي من عدم استمرارية دالة الهدف من وجهة نظر التحليل الرياضي.

والمسألة يمكن أن تكون أكثر سهولة تحليلية وذلك باقتراح الحلول للمتغيرات على النحو التالي:

$$yi = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x_j > 0 \end{cases}$$

وهذه الشروط يمكن شرحها من نقطة قيود الخطية على النحو الآتي:

$$x_j \leq My_i$$

حيث $M > 0$ وتكون كبيرة جدا بحيث تكون $x_j \leq M$ عليه يمكن إعادة كتابة دالة الهدف على نمط أكثر وضوح.

Minimize $z = \sum_{j=1}^{N} (c_j x_j + k_i y_i)$

S. T.

$0 \le x_i \le M\, y_i$ لكل (J)

$y_1 =$ $\underline{0}$ أو $\underline{1}$ لكل (J)

ولتوضيح أن $x_i \le M\, y_i$ نلاحظ أن:

$x_j > 0$

$y_i = 1$

و k_j تكلفة ثابتة تضاف إلى دالة الهدف.

فإذا كان $x_j = 0$ و y_j تساوي صفر أو 1

ولكن بما أن $k_j > 0$ و z تصغير

$\therefore$ y_1 يجب أن تساوي صفر.

مثال 2:

في خطوط الإنتاج المحدد نلاحظ أن n من العمليات الإنتاجية يمكن أن تعمل على آلة واحدة في أقل زمن ممكن. وفي نهاية كل عملية إنتاجية ينتقل المنتج من عملية إنتاجية إلى أخرى حتى آخر عملية إنتاجية ليحقق الزمن اللازم للإنتاجي.

وعليه فإن القيود التي تحدد مسار هذه العملية الإنتاجية لها الاشتراطات الآتية:

1- التسلسل.

2- عدد اختلاط العمليات.

3- تحقيق الزمن اللازم للإنتاج.

والشروط الأخرى أنه من الممكن أن تقام عمليتين إنتاجيتين على الآلة الواحدة (بالتناوب).

فمثلا لو فرضنا أن النوع الأول x_j الزمن المحدد لبداية العملية الإنتاجية الأولى J. وأن a_j هو الزمن اللازم للعملية الإنتاجية J.

فإذا كانت العملية I تسبق العملية J فإن نتيجة التسلسل تعني الآتي:

$x_i + a_i \leq x_j$

أما إذا اعتبرنا الشرط الثاني فإن:

$x_i - x_j \geq a_j$ أو $x_j - x_i \geq a_i$

وهذا يعتمد على أن i أو x أو J ثابتا في الحل الأمثل للمسألة.

أما القيد الثالث

$$y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان العملة j تسبق i} \\ 1 & \text{إذا كان العملة i تسبق j} \end{cases}$$

للتعرف بأن M قيمة عالية جدا

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq a_j$$

$$M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq a_i$$

أما عن زمن إتمام العملية الإنتاجية فيمكن تعريفه بالمعادلة التالية:

$$x_j + a_i \leq d_j$$

حيث d_j الزمن اللازم لتكميل المنتج.

فإذا عرفنا t بأنها الزمن الإجمال لإنهاء جميع العمليات الإنتاجية فإن المسألة تصاغ على النحو الآتي:

Minimize $z = t$

S.T.

$x_j + a_j \leq t$ $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

9.2 طرق حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة:

1- طريقة قطع مستوى:

تهتم هذه الطريقة بحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة حل المسائل بواسطة الرسم.

مثال:

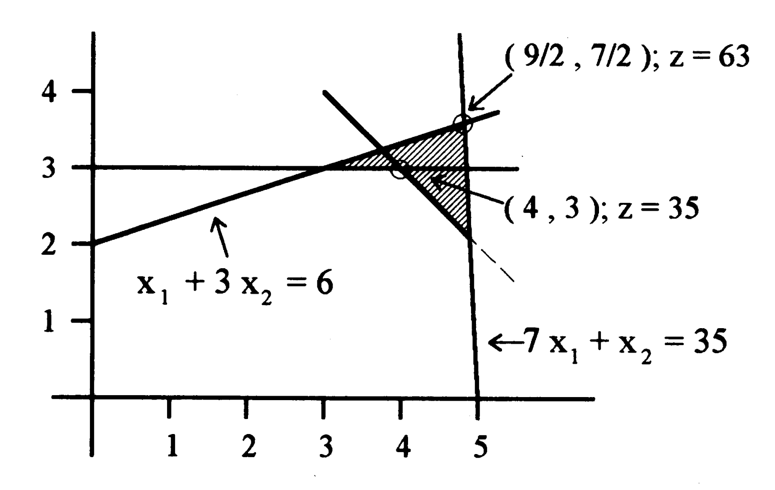
Max. $Z = 7x_1 + 9x_2$

S.T.

$-x_1 + 3x_2 \leq 6$

$7x_1 + x_2 \leq 35$

$x_1, x_2 \geq 0$ وأعداد صحيحة



وإذا بحثنا عن الحل في الزوايا للمساحة المحصورة مع إهمال شرط الحصول على الأعداد الصحيحة فإنه سوف يعطي

$$x_1 = \frac{9}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{7}{2} \quad , \quad z = 63$$

ومن الواضح أن هذا الحل يعطي أعداد غير صحيحة.

إن فكرة قطع المستويات تعتمد على تغير الدالة المقعرة للحل إلى حل يعطي أعداد صحيحة والذي سوف يؤثر على المساحة المحدودة لإعطاء الحل بأعداد صحيحة ويعني هذا الاستغناء عن الكسور العشرية ويصبح الحل كما هو موضح بالرسم ويصبح الحل.

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 3, \qquad z = 55$$

أما عن التعبير عن هذه الطريقة بواسطة السمبلكس فسوف نوضحها في المثال التالي:

مثال:

بالإشارة إلى المثال السابق الذي تم حله بواسطة الرسم نلاحظ أن الجدول النهائي (الحل الأمثل) سوف يكون على الصورة التالية:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	63
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{7}{2}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{9}{2}$

بما أن الحل ذو أعداد غير صحيحة.

$$0x_1 + x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{7}{22}x_4 = 3\frac{1}{2}$$

$$\left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = \left(3 + \frac{1}{2}\right)$$

$$S_1 = \frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x4 = -\frac{1}{2}$$

بإضافة هذه المعادلة إلى الجدول السابق وفق قواعد قطع المستويات.

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الطرف الأيمن
z	0	0	$\frac{28}{11}$	$\frac{15}{11}$	0	63
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{22}$	$\frac{3}{22}$	1	$4\frac{1}{2}$
S_1	1	0	$\frac{-7}{22}$	$\frac{-1}{22}$	1	$\frac{-1}{2}$

السمبلكس الثنائي يعطي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	الحل
z	0	0	0	1	0	63
x_2	0	1	0	0	0	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

مادام الحل مازال غير ذي أعداد صحيحة.

$\therefore$ يمكن كتابة المعادلة x_1 على النحو الآتي:

$$x_1 + \left(1 + \frac{1}{7}\right)x_4 + \left(-1 + \frac{6}{7}\right)S_1 = \left(4 + \frac{4}{7}\right)$$

$$S_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}S_1 = -\frac{4}{7}$$

بإضافة هذا القيد إلى آخر جدول تحصل على الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	8	0	59
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
S_2	1	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-6}{7}$	1	$\frac{-4}{7}$

إن استخدام طريقة السمبلكس الثنائي يؤدي إلى الآتي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
z	0	0	0	1	2	7	35
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	4
x_3	0	0	1	0	-4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	-7	4

وهذا الجدول يعطي الحل الأمثل للأعداد الصحيحة حيث

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad z = 55$$

9.3 طرقة حل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة بواسطة التوزيع والنظم

(Branch - and - bound Method)

يهتم هذا التكتيك بحل مسائل البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة وذلك باعتبار المسألة أولا ذات حالة البرمجة العاجية ويمكن تلخيص المبدأ العام لهذا التكتيك على النحو الآتي:

أولا: حل مسألة البرمجة الخطية حلا عاديا.

ثانيا: لو فرضنا أن x_1 عبارة عن متغير ذو عدد صحيح وأن حله الأمثل ( ) يحتوي على كسر عشري

وبالتالي يمكن تحديد المدى الذي يوجد فيه الحل على النهج التالي:

$$[x_r^*] < x_r < [x_r^*]+1$$

وبالتالي فإن الحل الأمثل للعدد الصحيح يجب أن يحقق الآتي:

$$xr \leq [x_r^*] \quad \text{أو} \quad x_r \geq [x_r^*]+1$$

إن المسألة الأساسية هنا تكون في حالة تقسيم إلى مسألتين ولتوضيح الفكرة بصورة سريعة تلجأ إلى المثال العددي التالي:

Max. $Z = 2x_1 + 3x_2$

S.T.

$5x_1 + 7x_2 \leq 35$

$4x_1 + 9x_2 \leq 36$

$x_1,\ x_2,\ \geq 0$ وأعداد صحيحة

إن حل المسألة موضح في الشكل 8.1.

9.4 مسائل:

1- اوجد حل المسألة التالية:

Max. $Z = 20x_1 + 10x_2 + 10x_3$

S.T.

$2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \geq 15$

$6x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 20$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$ وأعداد صحيحة

2- أوجد حل المسألة التالية بطريقة الرسم:

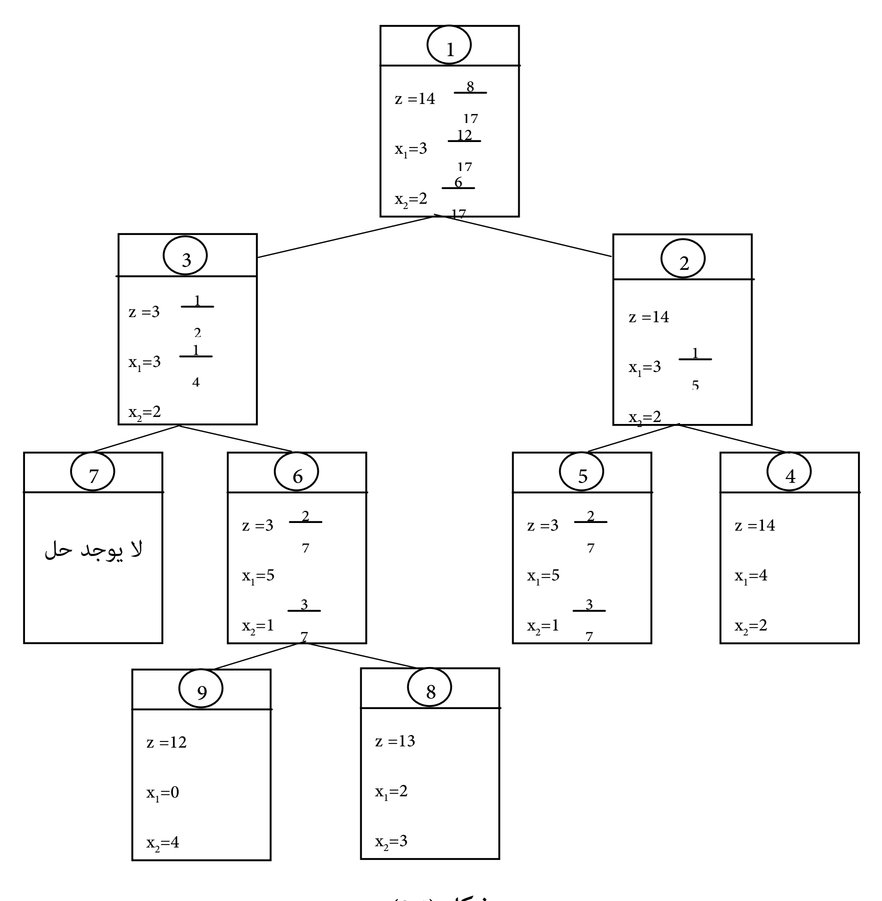
Max. $Z = 2x_1 + x_2$

S.T.

$10x_1 + 10x_2 \leq 9$

$10x_1 + 2x_2 \leq 1$

وأعداد صحيحة $x_1, x_2, \geq 0$



شكل (9.1)

4- أوجد حل المسألة التالية:

Max. $Z = x_1 + x_2$

S.T.

$2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$6x_1 + 5x_2 \leq 30$

وأعداد صحيحة $x_1, x_2, \geq 0$

5- إذا فرضنا أن مصنع الجرارات بتاجوراء ينقل 750 جرار من طرابلس إلى بنغازي على شاحنات مع إعطاء المعلومات التالية:

	نوع 1	نوع 2
عدد الجرارات في الشحنة الواحدة	200	100
كمية الوقود المصروفة على الشحنة/ لتر	4800	2800
حجم الشحنة	25	10

وإذا علمت أن كمية الوقود المتاحة 22.000 لتر والربح المتوقع من الشحنة الواحدة للنوع الأول 2000 د.ل. لكل جرار وللنوع الثاني 1000 د.ل. لكل جرار.

أوجد عدد الشحنات المطلوبة لتعظيم الربح.

6- استخدم طريقة قطع المستويات لحل المسألة التالية:

Max. $Z = 15x_1 + 32x_2$

S.T.

$7x_1 + 16x_2 \leq 35$

$3x_1 + 2x_2 \leq 9$

وأعداد صحيحة $x_1, x_2, \geq 0$

7- شركة لحفر آبار النفط بمنطقة السرير حددت موقعين لحفر آبار نفط تضخ هذا النفط إلى أربعة مواقع مختلفة على الشاطئ الليبي فإذا علمت بأن تكلفة تجهيز الحفر للآبار i والتي يرغب في ضخها إلى الموقع J.

$(i = 1, 2)$

$(J = 1, 2, 3, 4)$

معطاة حسب الجدول التالي:

الموقع	تكلفة النقل إلى مواقع استقبال النفط (د.ل)				
	١	٢	٣	٤	تكلفة التجهيز
١	٢	١	٨	٥	٥
٢	٤	٦	٣	١	٦

المطلوب: نقل النفط من الآبار إلى المواقع بأقل تكلفة ممكنة.

8- حل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = 3x_1 + 7x_2$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 \leq 2.5$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

أعداد صحيحة $x_1, x_2, \geq 0$

9- حل المسألة التالية:

$$\text{Max.} \quad Z = x_1 + 2x_2$$

S.T.

$$5x_1 + 7x_2 \leq 21$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 8$$

أعداد صحيحة $x_1, x_2, \geq 0$

10- حل المسألة التالية:

Max. $Z = 21\,x_1 + 11\,x_2$

S.T.

$7\,x_1 + 4\,x_2 \leq 13$

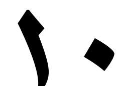
$x_1\,,\ x_2\,,\ \geq 0$ أعداد صحيحة

الفصل العاشر

تخطيط المشروعات

يعتبر تخطيط المشروعات من العناصر المهمة في تنفيذ المشاريع بأقل تكلفة ممكنة وإن من أولي الطرق لتخطيط المشروعات طريقة (Gantt bar chart). ومع الوقت الحاضر اهتمت الإدارة الهندسية بتخطيط المشروعات واختيار الطرق الدقيقة لتخطيط المشروعات وكيفية التحكم، مثل طريقة ممر الخط التحكمي (المسار الحرج) (Critical path method) (C P M).

الفصل العاشر



تخطيط المشروعات

Project Planning

10.1 مقدمة:

يعرف المشروع بمجموع النشاطات التي لها علاقة ببعضها بحيث يتم تنفيذها في تسلسل معروف قبل اكتمال المشروع. وهذه النشاطات لها علاقة ببعضها في تسلسل منطقي بحيث لا يمكن أن يبدأ أي نشاط إلا بعد اكتمال النشاط الذي يعتمد عليه.

كما يعرف النشاط في المشروع بأنه العمل اللازم لوقت ومواد خام لتكملته.

ويعتبر تخطيط المشروعات من العناصر المهمة في تنفيذ المشاريع بأقل تكلفة ممكنة وإن من أولي الطرق لتخطيط المشروعات طريقة (Gantt bar chart) وتهتم بتحديد بداية ونهاية زمن أي نشاط في خطوط أفقية بمقياس رسم ومع الوقت الحاضر اهتمت الإدارة الهندسية بتخطيط المشروعات واختيار الطرق الدقيقة لتخطيط المشروعات وكيفية التحكم، مثل طريقة ممر الخط التحكمي (المسار الحرج) (Critical path method) (C P M).

وطريقة معايرة ومراجعة المشاريع (Project Evaluation + Review technique) وهذه الطرق بدأ العمل بها في الفترة (1956-1958) حيث طورت (C P M) بواسطة الباحث E. I du Pont تحت دعم شركة (Mauchly ass) مما أدى إلى تخفيض وقت الأعطال اللازمة لعمل برنامج الصيانة من 78 ساعة إلى 25 ساعة ثم بواسطة تطبيقات على الأعمال الإنشائية بواسطة الباحث (Maushly Associations) إلى طريقة بيرت

(PERT) بالتعاون مع البحرية الأمريكية (إحدى المؤسسات الاستشارية) في تخطيط برامج الصواريخ العابرة للقارات المسمى (بولاويس) وقد أدى استخدام هذا الأسلوب إلى تقليل المدة اللازمة لأعمال المشروع بنجاح بمدة عامين.

إن (PERT) و (CPM) طرق تهتم بحساب زمن المشاريع وهما متشابهتان إلى حد كبير في العمليات الرياضية، وتختلف هاتان الطريقتان في حساب الزمن حيث أن الزمن محدد في طريقة (CPM) بينما يعتمد على العمليات الإحصائية في طريقة (PERT).

إن تخطيط المشروعات بطريقة (PERT) و (CPM) يتضمن ثلاث مراحل أساسية هي:

التخطيط والجدولة والتحكم.

حيث أن مرحلة التخطيط تهتم بتجزئة المشروع إلى عدة نشاطات. ويعبر عن تقدير الزمن لهذه الأنشطة بواسطة أسهم مترابطة تكون شبكات تعبر عن التسلسل المنطقي لتنفيذ المشروع.

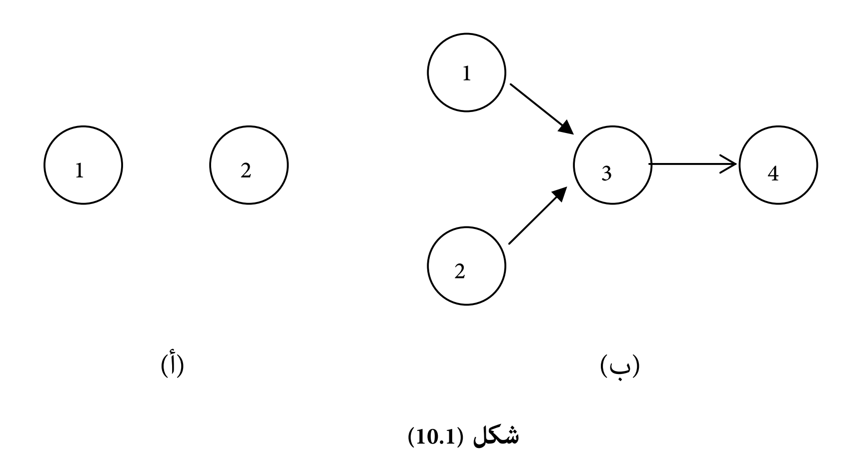
أما هدف الجدولة ونهايته. بالإضافة إلى أن التعبير عن هذه النشاطات يجب أن يوضح عليه الخط التحكمي للأنشطة التي لا تتحمل التأخير في المشروع.

أما المرحلة الثالثة وهي مرحلة التحكم والتي يعبر عنها باستخدام شبكة الأهم التخطيطية لتسلسل الزمن (Time sequence) بحيث أن هذه الشبكة يجب أن تحدد وتحلل لحساب التغيرات التي تطرأ على المشروع.

10.2 تمثيل الأنشطة بواسطة الأسهم:

إن عملية رسم الأسهم تمثل العلاقة بين تسلسل النشاطات وعلاقتها ببعضها في المشاريع. وبصفة عامة تستخدم الأسهم في التعبير عن النشاطات، حيث أن رأس السهم يمثل نهاية النشاط، حيث أن رأس السهم يمثل نهاية النشاط.

وبداية السهم تمثل بداية النشاط. والشكل رقم (أ - 10.1) يوضح سورة لسهم يمثل نشاط ما (i,j) حيث أن بداية السهم j، أما الشكل (ب - 10.1) فهو يوضح أن النشاط (3،4).

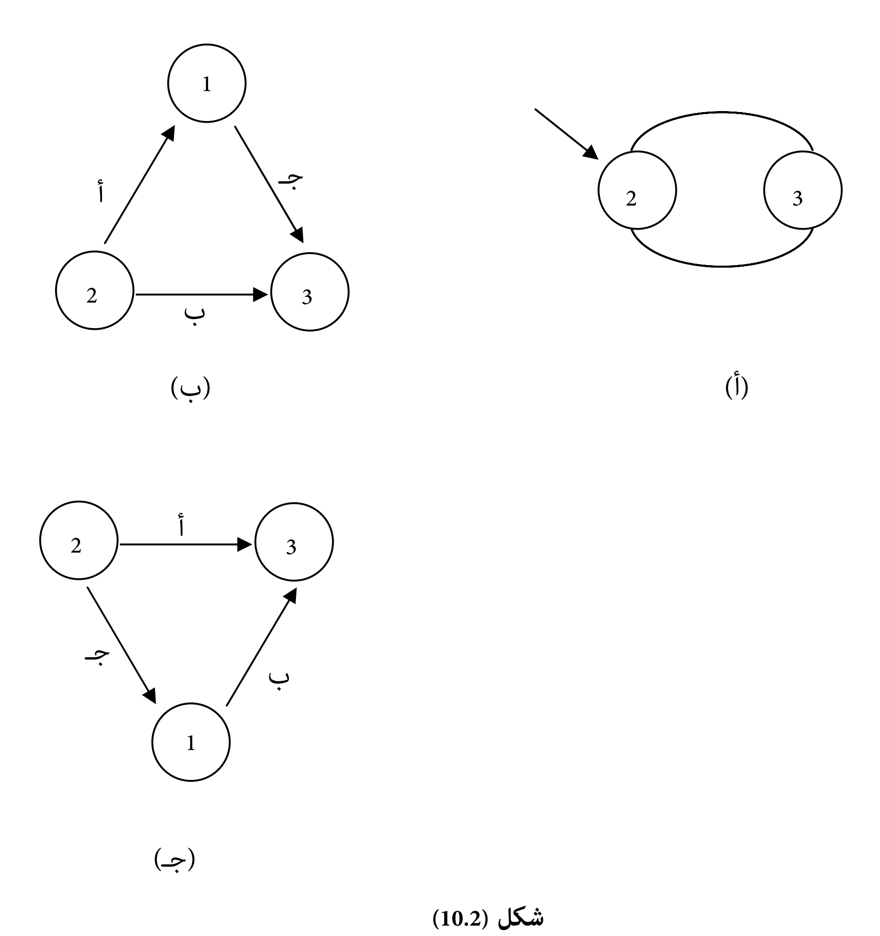


شكل (10.1)

١٠,٣ قواعد استخدام الأسهم في بناء الشبكات التخطيطية:

قاعدة (1): كل نشاط يمثل بواسطة سهم واحد فقط في الشبكة التخطيطية، على سبيل المثال وضع ماسورة في الأرض يمثل بواسطة سهم واحد.

قاعدة (2): لا يمكن تمثيل نشاطين من نقطة واحدة كما هو موضح بالشكل (أ- 10.2) ويمكن تمثيل النشاطين من نقطة واحدة بواسطة إضافة نشاط بدون قيمة زمنية كما هو موضح بالشكل (ب- 10.2).



شكل (10.2)

أمثلة حول قواعد الرسم:

1- لا يمكن تنفيذ نشاط B بعد الانتهاء من النشاط A.

2- لا يمكن البدء بتنفيذ النشاط C بعد إتمام النشاط A،B.

3- النشاط A مسيطر على الأنشطة B، C أي لا يمكن البدء بتنفيذ الأنشطة B ، C إلا بعد الانتهاء من النشاط A.

4- لا يمكن البدء بتنفيذ النشاط C ، D النشاط D مسيطر عليه من قبل النشاط C فقط.

5- النشاط B مسيطر عليه من قبل A ، C النشاط D مسيطر عليه من قبل النشاط C فقط.

6- النشاط D مسيطر عليه من قبل A ، B بينما النشاط E مسيطر عليه من قبل النشاط B ، C.

-7 النشاط D مسيطر عليه من قبل A ، B ، C النشاط E مسيطر عليه من قبل B ، C فقط.

-8 النشاط A يسطر على C، D بينما النشاط B يسيطر على D ، E النشاط D مسيطر عليه من قبل كل من A ، B.

-9 النشاط C مسيطر عليه من قبل D ، A النشاط y مسيطر عليه من قبل A ، B ، C النشاط z مسيطر عليه من قبل D فقط.

الشكل (أ - 10.3) يوضح التمثيل الغير صحيح للنشاطات. والشكل (ب - 10.3) يوضح التمثيل الصحيح للنشاطات

(أ)

(ب)

شكل (10.3)

قاعدة (3): للتأكد من أن الشبكة التخطيطية لأي مشروع صحيحة يجب أن تجيب الشبكة على الأسئلة التالية:

1- ما هو النشاط الذي يجب أن يكتمل قبل أن يبدأ النشط الذي يعتمد عليه؟

2- ما هو النشاط الذي يجب أن يتبع النشاط السابق؟

3- ما هو النشاط الذي يجب أن ينفذ في نفس وقت النشاط الحالي؟

الأزمة المختلفة في شبكة PERT:

في شبكة (PERT) توجد ثلاثة من الأزمنة وهي:

1- الزمن التفاؤلي The optimistic time

2- الزمن التشاؤمي The pessimistic time

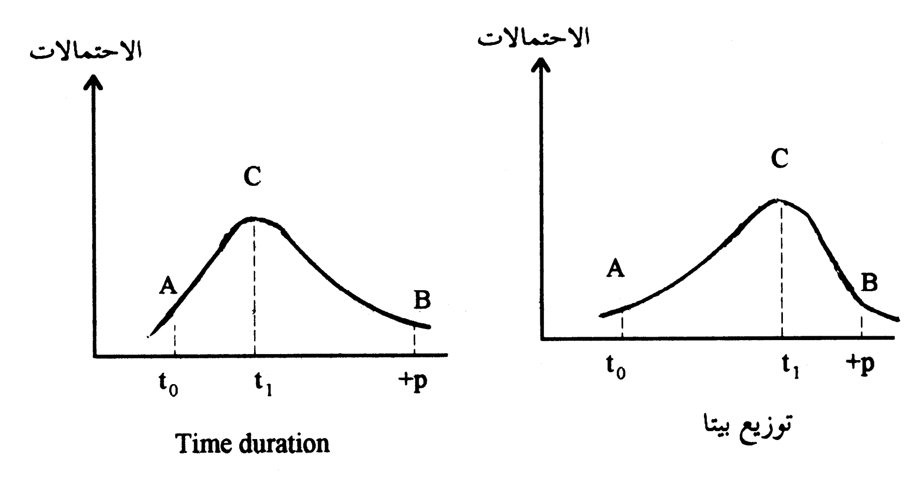
3- الزمن الأكثر احتمالا The most likely time

الزمن التفاؤلي to هو أقصر زمن ممكن لتنفيذ وإتمام أي نشاط تحت ظروف متتالية (الزمن الذي يفترض أفضل الظروف المتوقعة).

الزمن التشاؤمي tp وهو الزمن الذي يشير إلى التقدير الأكثر تحفظا في ظل ظروف سيئة (Abnormal conditions).

الزمن الأكثر احتمالا هو الزمن الممكن والأكثر احتمالا لتنفيذ وإتمام النشاط في ظل ظروف أو شروط طبيعية (Normal Canditions).

يعتبر توزيع بيتا أكثر الأنماط ملائمة لتحليل شبكة PERT ويوضح الشكل التالي توزيعين لبيتا الأول مائل لليسار (والثاني مائل إلى جهة اليمين).



شكل (10.3)

وقد كان اهتمام مصممي شبكة (PERT) ينصب في إيجاد ذلك النوع من التوزيع الاحتمالي الذي يحقق الحالات التالية:

1- التوزيع يجب أن تكون له احتمالية قليلة للوصول إلى أقصى وقت تفاؤلي (أقصر وقت).

2- التوزيع يجب أن يكون له احتمالية قليلة للوصول إلى أقصى وقت تشاؤمي (أطول وقت).

3- التوزيع يجب أن يكون له وقت واحد فقط وهو الأكثر احتمالا والذي يستطيع الحركة بحرية بين الطرفين المذكورين في الحالة 1، 2.

إن هذه الشروط أعلاه تلبي متطلبات توزيع بيتا. وبالنسبة لتوزيع بيتا الانحراف المعياري (Standard deviation) هو = $\sigma \dfrac{tp - to}{\sigma^{o}}$

$$\sigma_2 = \frac{tp - to}{\sigma^{o}}$$ التباين (Variance)

الوقت المتوقع (Expected tine):

الأوقات الثلاثة لتوزيعه بيتا هي t_o ، t_p ، t_i

التباين والانحراف المعياري يمكن حسابه باستعمال t_o ، t_p ومع ذلك من المفترض ربط الأوقات المذكورة في وقت واحد، وعليه لا يمكن الأخذ بالأوقات الثلاثة سوية، بل يجب احتساب متوسط لها. هذا المتوسط يطلق عليه الزمن المتوقع ويرمز له tE ويعتبر الزمن المتوقع الذي يستغرقه أي نشاط في ضوء التقديرات الزمنية الثلاثة السابقة التي تأخذ الأوزان التالية:

أربعة أوزان للزمن الأكثر احتمالا.

وزن واحد للزمن التفاؤلي.

وزن واحد للزمن التشاؤمي.

وبذلك تكون معادلة احتساب الزمن المتوقع كالآتي:

الزمن المتوقع = (الزمن التفاؤلي + 4 الزمن الأكثر احتمالا + الزمن التشاؤمي) / 6

$$(tE)A = \frac{t_o + 4t_i + t_p}{6} =$$

مثال (10.1):

أحسب الزمن المتوقع لكل من الأنشطة التالية:

t_o	t_i	t_p	
4	6	11	نشاط A
5	10	12	نشاط B

الوقت المتوقع للنشاط A

$$(tE)A = \frac{t_o + 4t_i + t_p}{6}$$

$$= \frac{4 + (4 \times 6) + 11}{6} = 6.5 \text{ يوم}$$

الزمن المتوقع للنشاط B

$$(tE)A = \frac{t_o + 4t_i + t_p}{6}$$

$$= \frac{5 + (4 \times 10) + 12}{6} = 9.5 \text{ يوم}$$

مثال 10.2:

ارسم الشبكة التخطيطية التي تحتوي على النشاطات التالية A ، B ، C ..... ، L بحيث تحقق العلاقات التالية:

1- النشاط A ، B ، C أول نشاطات تبدأ في المشروع في آن واحد.

2- لنشاطات A ، B تسبق النشاط D.

3- نشاط B يسبق النشاطات E ، F ، H.

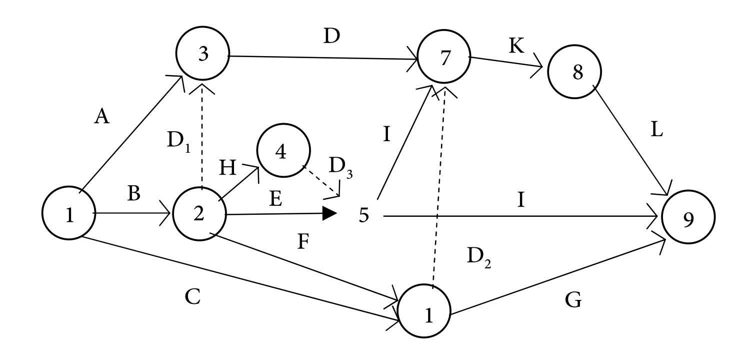
4- النشاط F ، C يسبق الناشط G.

5- النشاطات E ، H يسبقن النشاطات I ، J.

6- النشاطات C ، D ، F ، J يسبقن النشاط K.

7- النشاط K يسبق النشاط L.

8- النشاطات I ، G ، L نهاية المشروع أنيا.



حيث أن الأنشطة D_1 ، D_2 ، D_3 هي أنشطة ذات أزمنة تساوي صفر أنشطة خامدة.

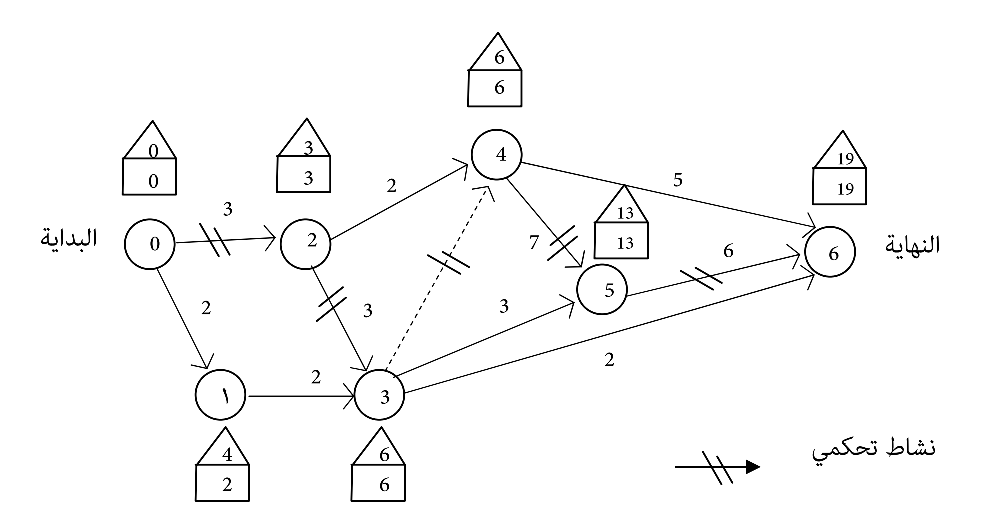
10.4 طرق حساب الخط التحكمي (Critical path calculation):

إن تطبيق (PERT) و (CPM) يؤدي إلى تحديد بداية ونهاية كل نشاط في المشروع في الشبكة التخطيطية.

يسمى النشاط بأنه واقع في الخط التحكمي إذا كان التأخير في بداية تنفيذ سوف يؤثر على تأخير في زمن المشروع بالكامل. أما النشاط الذي لا يقع في الخط التحكمي فهو النشاط التي بدايته أو نهايته إذا تأخرت لا تؤثر في زمن تأخير المشروع إلى حد معين.

ويسمى هذا الحد من الزمن المسموح به لتأخير - الزمن الفائض - (Slack).

لتحديد الخط التحكمي لأي مشروع نستخدم المثال التالي:



إذا فرضنا أن Es_i زمن بداية النشاط

D_{ij} زمن تنفيذ النشاط

زمن بداية النشاط I ونهاية النشاط j.

فإن: $$ES_j = \underset{i}{Max}\{E_{si} + D_{ij}\}$$

عندما تكون $ES_o = 0$

فمثلا:

$ES_1 = ES_o + D_{o1}$

$= 0 + 2 = 2$

$ES_2 = ES_o + D_{o2}$

$= 0 + 3 = 3$

$ES_3 = Max\ [ES_i + D_{i3}]$

$i = 1 , 2$

$= Max\ [2 + 2 , 3 + 3] = 6$

$i = 1 , 2$

وبنفس الطريقة:

$ES_4 = Max\ [ES_i + D_{i4}]$

$i = 2 , 3$

$= Max\ [3 + 2 , 3 + 3] = 6$

$i = 2 , 3$

$ES_5 = Max\ [ES_i + D_{i5}]$

$i = 3 , 4$

$ES_5 \quad = Max\ [6 + 3 , 6 + 7] = 6$

$i = 3 , 4$

$ES_6 = Max\ [ES_i + D_{i6}]$

$i = 3 , 4 , 5$

$ES_6 \quad = Max\ [2 + 2 , 3 + 3] = 6$

$i = 3 , 4 , 5$

$= Max\ [6 + 2 , 6 + 5 , 13 + 6] = 19$

$i = 3 , 4 , 5$

أما الحسابات في الاتجاه المعاكس يتم حسابها بالطريقة التالية:

إذا فرضنا أن LC_1 هو الزمن الأخير لتكملة النشاط.

إذا كان $i = n$ حيث أن نهاية النشاط (n)

$LC_n = ES_n$

$$LC_i = \underset{j}{Min}\,[LC_j - D_{ij}]$$

حيث قيمة LC يمكن حسابها بالطريقة التالية:

$LC_6 = ES_6 = 19$

$LC_5 = ES_5 - D_{56} = 19 - 6 = 13$

$LC_4 = Min\ [LC_i - D_{4j}]$

$j = 5 , 6$

$$= Min\ [13 - 7\ ,\ 19 - 5] = 6$$

$$i = 5\ ,\ 6$$

$$LC_3 = Min\ [LC_i - D_{3j}]$$

$$j = 4\ ,\ 5,\ 6$$

$$= Min\ [6 - 0\ ,\ 13 - 3\ ,\ 19 - 2] = 6$$

$$LC_2 = Min\ [LC_i - D_{2j}]$$

$$j = 3\ ,\ 4$$

$$= Min\ [6 - 3\ ,\ 6 - 2] = 3$$

$$LC_1 = LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4$$

$$LC_0 = Min\ [LC_i - D_{0j}]$$

$$j = 1\ ,\ 2$$

$$= Min\ [4 - 2\ ,\ 3 - 3] = 0$$

عليه، يمكن تحديد الخط التحكمي باستخدام القواعد التالية. فمثلا نشاط (i , j) يقع في الخط التحكمي إذا تحققت الشروط التالية:

$$EC_i = LC_i$$

$$EC_j = LC_j$$

$ES_j - EC_i = LC_j - LC_i = D_{ij}$ لكل الأنشطة (i, j)

نلاحظ أن الشروط المذكورة أعلاه لا تسمح بالاتاحية أو الوقت الزائد ما بين ES_i ، LC_i.

فلو نظرنا إلى الرسم التخطيطي بالأسهم نلاحظ أن الاتجاه الأول محسوب في مربعات □ والاتجاه المعاكس محسوب في مثلثات Δ والفرق ما بين □ و Δ هو الزمن الزائد المسموح به في تأخير النشاط في المشروع.

النشاطات (2 ، 0)، (3 ، 2) (4 ، 3) (5 ، 4) (6 ، 5) تعرف

$$\overline{D} = \frac{(a+b)/2+2m}{3}$$

$$= \frac{a+b+4m}{6}$$

أما الانحراف المعياري

$$V = \left(\frac{b-b}{6}\right)^2$$

لمزيد من التفاصيل يمكن الرجوع إلى مرجع في علم الإحصاء.

مثال توضيحي: احسب الخط التحكمي للنشاطات التالية:

النشاط	تقديرات الزمن (m, b, a)
(0،1)	(1،3،2)
(0،2)	(2،8،2)
(1،3)	(1،3،2)
(2،3)	(1،11،1.5)
(2،4)	(0.5،7.5،1)
(3،5)	(1،7،2.5)
(3،6)	(1،3،2)
(4،5)	(6،8،7)
(3،6)	(1،3،2)
(4،5)	(6،8،7)
(4،6)	(3،11،4)
(5،6)	(4،8،6)

بتطبيق المعادلات أعلاه تحصل على الجدول التالي:

تعرف الخط التحكمي وفي نفس الوقت اللازم لتكملة المشروع.

أما النشاطات (2،4) ، (3،5) ، (3،6) ، (4،6) ، تفي بالشرطين الأول والثاني ولكن لا تفي بالشرط الثالث لتحقيق أنها في الخط التحكمي.

10.5 طرق حساب الزمن الزائد (Determination of the float):

يعد حساب الحط التحكمي، بأنه حساب الزمن الزائد للنشاطات التي لا تقع في الخط التحكمي. ومن المعروف أن الأنشطة التي تقع في الخط التحكمي يجب أن يكون الزمن الزائد يساوي فيها صفرا، وفي الواقع هو السبب الرئيسي التي أهلها بأن تكون في الخط التحكمي.

وقبل البدء في حساب الزمن الزائد، من الضروري تعريف زمنين مصاحبين للنشاط الواحد.

أ - آخر موعد لبداية النشاط (Latest Start) (LS).

ب- أول زمن لتكملة النشاط (Earliest Completion) (ES).

ويمكن تعريف هذين الزمنين لأي نشاط (i ، j) بالآتي:

$$LS_{ij} = LC_i - D_{ij}$$

$$ES_{ij} = ES_i + D_{ij}$$

ويوجد نوعان من الأزمنة الزائدة:

أ - مجموعة الزمن الزائد (Total Float) (TF)

ب- الزمن الزائد الحر (Free Float) (FF)

فإن كان مجموع الزمن الزائد (TF) يسمى TF_{ij} والذي يعرف بالفرق ما بين الحد الأقصى لتكملة نشاط. ($=LC_j - ES_i$) وزمن النشاط ($= D_{ij}$) أي أن:

$$TF_{ij} = LC_j - ES_i - D_{ij}$$

$$= LS_{ij} - ES_{ij}$$

أما الزمن الزائد الحر (FF) مع افتراض أن النشاطات كلها تبدأ بأسرع طريقة ممكنة فإن الزمن الزائد الحر لنشاط (i ، j) يسمى الزيادة المتاحة من الزمن ($= ES_i - ES_i$) أي أن FF:

$$FF_{ij} = ES_i - ES_i - D_{ij}$$

وبالتالي حساب الخط التحكمي مع مجموع الزمن الزائد مع الزمن الزائد الحر تلخص حساباته في الجدول (10.1).

جدول (1-10)

النشاط	الفترة	الزمن المبكر البداية □	 النهاية Δ	الزمن المتأخر البداية	 النهاية Δ		
(i, j)	D_{ij}	ES_i	ES_{ij}	LS_{ij}	LC_i	TF_{ij}	FF_{ij}
(0,1)	2	0	2	2	4	2	0
(0,2)	3	0	3	0	3	0	0
(1,3)	2	2	4	4	6	2	2
(2,3)	3	3	6	3	6	0	0
(2,4)	2	3	5	4	6	1	1
(3,4)	0	6	6	6	6	0	0
(3,5)	3	6	9	10	13	4	4
(3,6)	2	6	8	17	19	11	11
(4,5)	7	6	13	6	13	0	0
(4,6)	5	6	11	14	19	8	8
(5,6)	6	13	19	13	19	0	0

10.6 بناء خرائط الزمن ومستوى المصادر:

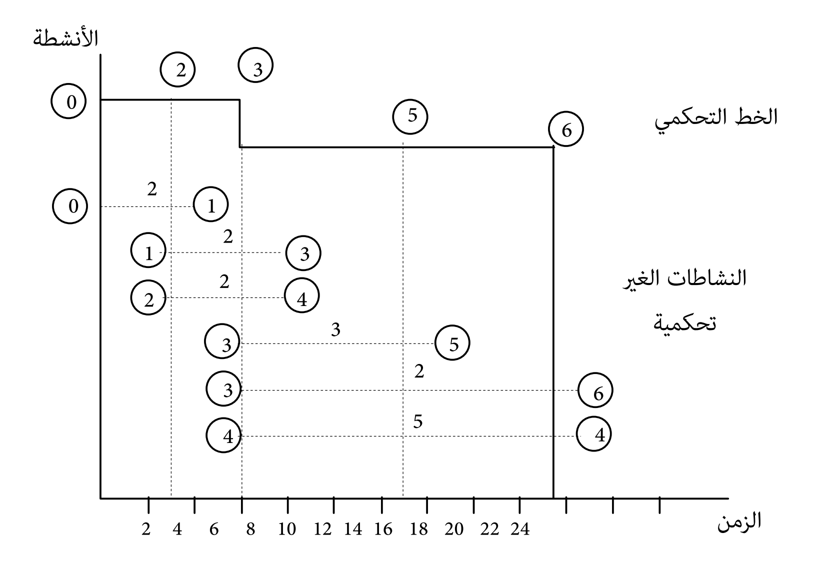
يتم إصدار خرائط الزمن ضمن حدود الموارد المتاحة لأنها تعكس النشاطات الحقيقية للمشروع من خلال الطاقة البشرية والآلات المتاحة.

وبناء عليه فإن مجموع الزمن الزائد (TF) للنشاطات الغير واقعة في الخط التحكمي مفيد.

ولتوضيح كيفية بناء خرائط الزمن تستخدم المثال التالي:

مثال:

بالإشارة إلى المثال السابق بالنظر إلى المخطط شكل (10.4) نلاحظ أن الأنشطة التي تقع في الخط التحكمي خطوطها متصلة.



شكل (10.4)

مثال 10.4:

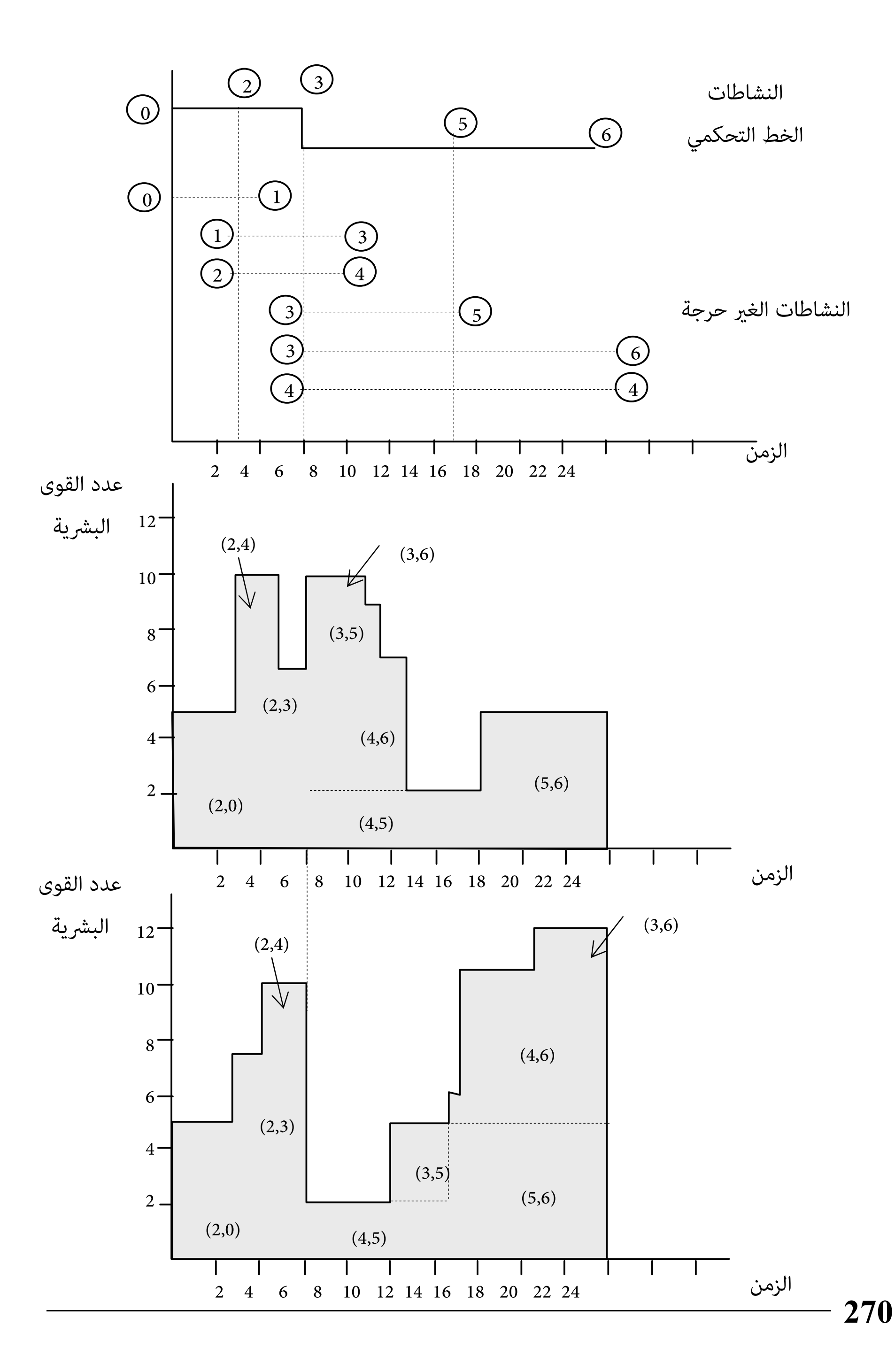
إذا فرضنا أن الطاقة البشرية اللازمة لتنفيذ عدة نشاطات للإنتاج منتج معين. والمطلوب عمل جدول تخطيطي لتوزيع هذه القوى البشرية خلال زمن تنفيذ المشروع. مع ملاحظة أن النشاط (0،1) والنشاط (1،3) لا تحتاج إلى جهد بشري حيث أن قيمتها صفر.

النشاط	عدد القوى البشرية اللازمة
0.1	0
0.2	5
1.3	0
2.3	7
2.4	3
3.5	2
3.6	1
4.5	2
4.6	5
5.6	6

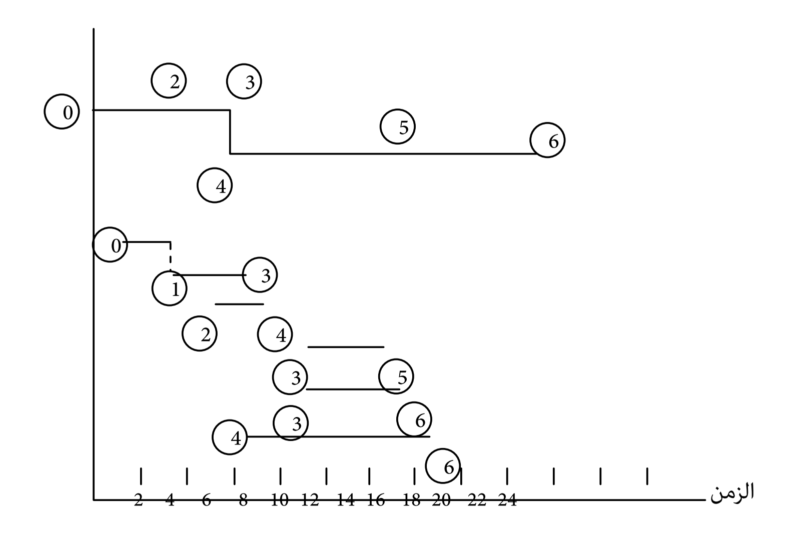
الشكل (10.5) يوضح القوى البشرية اللازمة خلال الزمن للأنشطة الغير واقعية في الخط التحكمي.

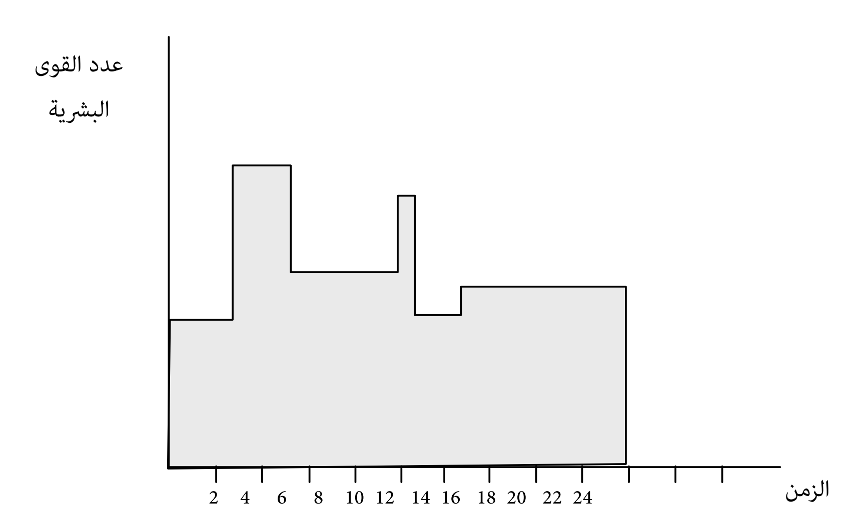
أما الشكل (10.6) يوضح توزيع الأنشطة حسب تخطيطها بشكل متأخر - الخطوط الغير متواصلة توضح الأنشطة الواقعة في الخط التحكمي والتي يجب أن تتحقق إذا كان زمن المشروع قد انتهى.

تلاحظ أن المشروع يحتاج على الأقل 7 رجال لتكملة المشروع. وأن 10 رجال كحد أقصى لتكملة المشروع. وأن أكبر تأخير ممكن يحصل لتنفيذ المشروع هو 12 رجل.



النشاطات
الخط التحكمي
النشاطات الغير حرجة
الزمن
عدد القوى البشرية
(2,4)
(3,6)
(3,5)
(2,3)
(4,6)
(5,6)
(2,0)
(4,5)





10.7 طرق حساب تخطيط المشروعات بواسطة الإحصاء:
(Probability consideration in project scheduling)

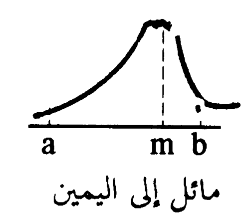
تساهم الإحصاء في تخطيط المشروعات باعتبار تقدير الزمن اللازم للإنجاز أي نشاط باعتماده على احتمالات هي:

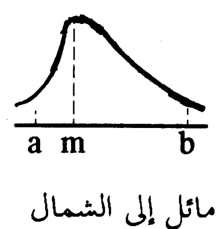
a - الزمن التفاؤلي: وهو أقصى زمن يمكن إنجاز فيه أي نشاط.

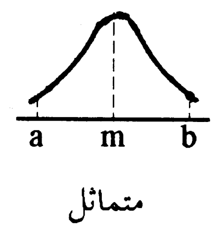
b - الزمن التشاؤمي: وهو أكبر زمن يمكن فيه إنجاز فيه أي نشاط.

m - الزمن المتوسط: وهو الزمن الطبيعي لإنجاز أي نشاط أو الزمن العادي.

وباعتبار أن احتمال إنجاز أي نشاط في الفترة m ونظرا لهذه الخواص يمكن تمثيلها بالرسم على النحو الآتي على نموذج التوزيع Beta المعروف.







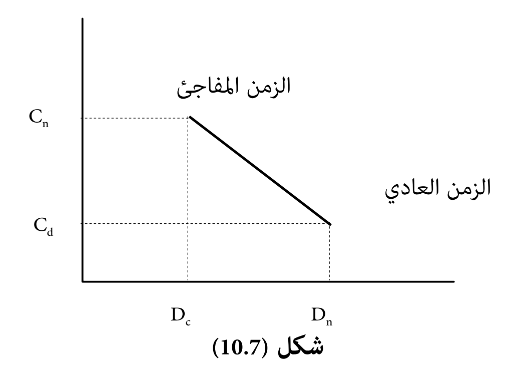
شكل (10.6)

وبالتالي يمكن التعبير عن المتوسط $\overline{D}$ والانحراف المعياري V لـ توزيع β على النحو الآتي:

V_{ij}	$\overline{D}.j$	النشاط
0.33	2	(0،1)
1.00	3	(0،2)
0.33	2	(1،3)
2.78	3	(2،3)
1.36	2	(2،4)
1.00	3	(3،5)
0.11	2	(3،6)
0.11	7	(4،5)
1.78	5	(4،6)
0.44	6	(5،6)

10.8 إدخال التكلفة في جدولة المشروع:

تعرف التكلفة هنا بالتكلفة المباشرة والتكلفة الغير مباشرة. فمثلا التكلفة الغير مباشرة هي تكاليف إدارية أو إشرافية لتنفيذ النشاط. أما التكلفة المباشرة - هو التكلفة المباشرة اللازمة لتنفيذ النشاط. شكل (10.7) توضح العلامة الخطية بين التكاليف.

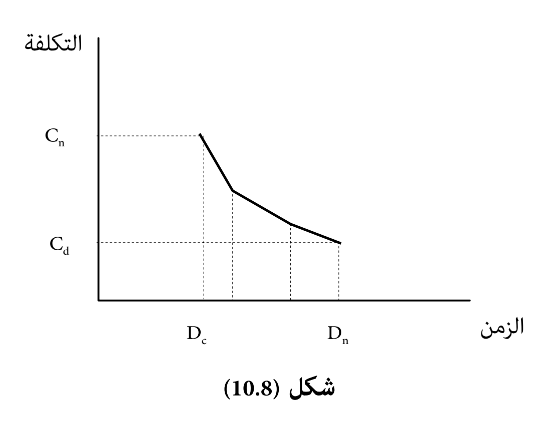


شكل (10.7)

حيث أن (D_n , C_n) تمثل الفترة الزمنية D_n مصحوبة بالتكلفة C_n إذا النشاط أنجز في الوقت العادي. ويمكن تقليل الفترة D_n بزيادة التكلفة، ويسمى في هذه الحالة الزمن المقلص، وبالتالي ترتفع التكلفة إلى النقطة (D_n , C_n).

إن علاقة الخط المستقيم يمكن استخدامها وفق المعايير المطلوبة لكل نشاط.

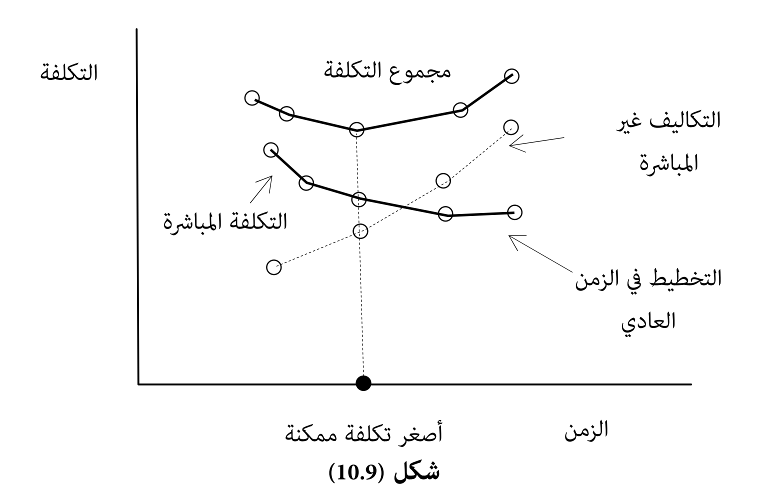
ويمكن حساب علاقة غير خطية لحساب الزمن والتكلفة كما هو في شكل (10.8).



شكل (10.8)

وفي هذه الحالة يمكن تقسيم النشاط إلى عدة أجزاء أو عدة نشاطات كل جزء نشاط له خط مستقيم على حدة.

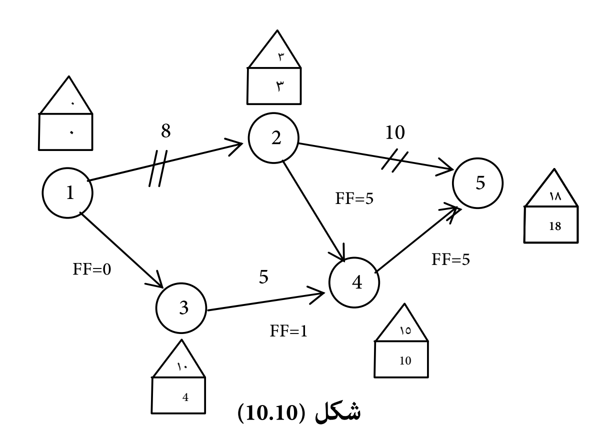
ويمكن تحليل هذه التكاليف من الخبرة العملية على الشكل (10.9).



شكل (10.9)

مثال 10.5:

إذا اعتبرنا الشبكة التخطيطية الموضحة بالشكل (10.10) وأن الزمن العادي والزمن المقلص موضحة بالجدول (10.10) المطلوب حساب أقل أو أصغر تكاليف ممكنة ما بين الزمن العادي والزمن المضغوط.



شكل (10.10)

الزمن المضغوط		الزمن المضغوط		
التكلفة	**الزمن**	**التكلفة**	**الزمن**	**النشاط**
200	6	100	8	(1,2)
350	2	150	4	(1,3)
90	1	50	2	(2,4)
400	5	100	10	(2,5)
220	1	100	5	(3,4)
100	1	80	3	(4,5)

يمكن تحليل هذه المسألة اعتمادا على ميل التكلفة - الزمن لمختلف الأنشطة والتي يمكن حسابه بالمعادلة الآتية:

$$\text{(Slope) الميل} = \frac{c_n - c_c}{D_n - D_c}$$

ويمكن تلخيص الميول في الجدول (10.2)

جدول (10-2)

النشاط	الميل
(1،2)	50
(1،3)	100
(2،4)	40
(2،5)	62
(3،4)	25
(4،5)	10

لبداية الحساب افتراض أن جميع النشاطات تحدث في الزمن العادي. والشبكة الموضحة في الشكل (10.10) تعطي الخط التحكمي تحت الزمن العادي حيث أن مجموع زمن المشروع 18 وتكلفته المصاحبة 580.

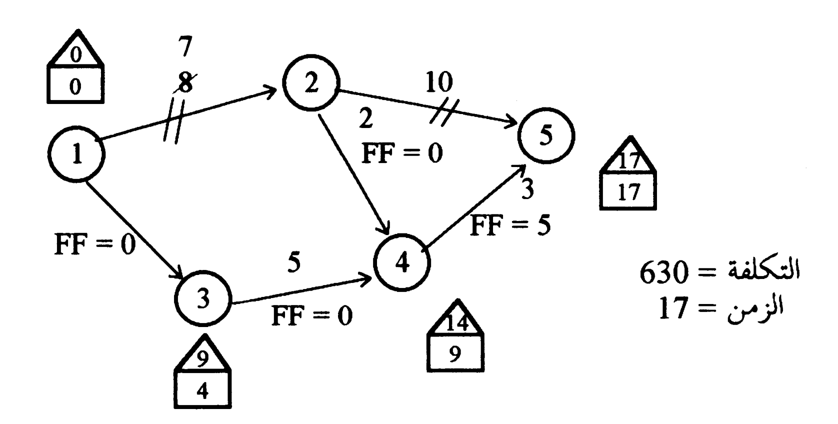
أما الخطوة الثانية التي تسمى تقليل الزمن اللازمة لتكملة المشروع وذلك بضغط زمن النشاطات الواقعة في الخط التحكمي وذلك بأقل ميول ممكن. وبناء على الشبكة الموضحة في الشكل (10.10) يوجد نشاطات فقط الواقعان في الخط التحكمي. ويمكن اختيار النشاط (1،2) لأنه له ميل أقل وفقا للمنحنى الزمني - التكلفة، ويمكن ضغط هذا النشاط بمقدار وحدتين زمن لحساب FF أولا نحتاج لتقليل زمن الخط التحكمي. سوف نلاحظ أن هذه النشاطات سوف تقل قيمة FF الموجبة بمقدار وحدة زمن. سوف نلاحظ أن هذه النشاطات سوف تقل قيمة FF الموجبة بمقدار وحدة زمن. وأن أقل FF لجميع النشاطات يحسب فيها FF اللازم.

وبتطبيق هذه القاعدة على الشكل (10.10) فإن FF موضح عل النشاطات التي يهمها. فمثلا النقص في النشاط (1،2) بمقدار وحدة زمن سوف يقلل FF للنشاط

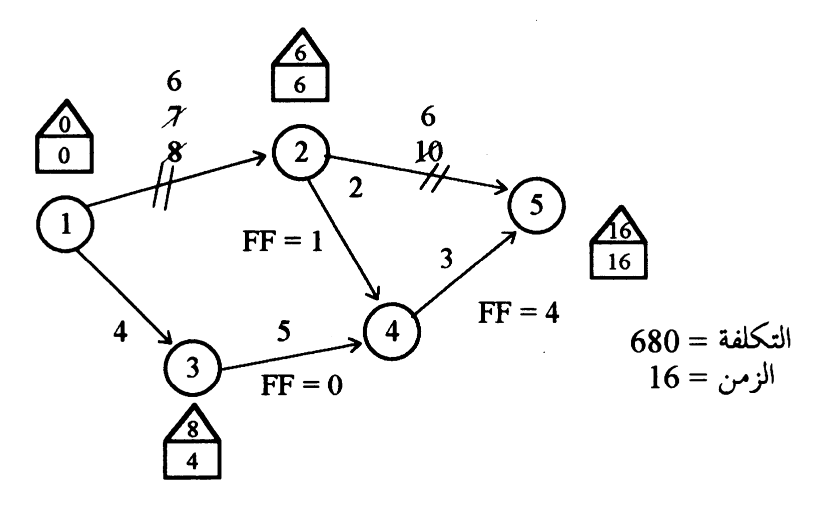
(3،4) من واحد إلى صفر أما FF للنشاط (4،5) سوف يبقى ثابت بمقدار قيمة 5. عليه فإن نهاية أي FF = 1.

الشكل (10-10) يوضح قيمة أن زمن المشروع 17 والتكلفة المصاحبة له

$630 = 580 + (18 - 17) \times 50$



شكل (10.11)



$630 + (17 - 16) * 5 = 680$

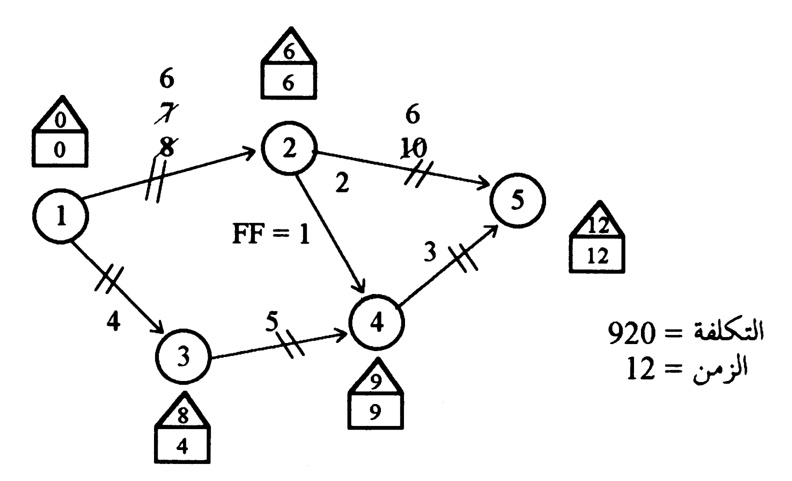
النشاط (2، 1) لا يمكن ضغطه أكثر من ذلك. وبالتالي النشاط (2،5) يمكن اختياره لضغط زمنه.

نهاية الزمن السريع = 10 - 5

وبما أن FF للنشاط (4،5) = 4

نهاية ضغط الزمن = القيمة الصغرى (4،5) = 4

ونتائج الحسابات توضح في الشكل الآتي:



من الرسم يوجد خطين تحكميين هما 1 ← 2 ← 5

و 1 ← 3 ← 4 ← 5

وزمن المشروع 12 وتكلفته تحسب على النحو الآتي:

680 + (16-12) x 60 = 920

ويعني ظهور خطين تحكميين إشارة إلى تقليص زمن المشروع بحيث يتم تقليص زمن المشروع عن طريق الخطين آنيا. وأن القاعدة السابقة لاختيار النشاطات الواقعة على الخط التحكمي. فمثلا الخط التحكمي 1 ← 2 ← 5 النشاط (5،2) يمكن

ضغطه وحدة زمن واحدة. أما الخط التحكمي 1 ← 3 ← 4 ← 5 يمكن ضغط النشاط (5،4) وفقا لصفر ميله بعدد وحدتين زمن.

∴ الزمن الصغير للخطين التحكميين يساوي أقل تقليص ما بين [2،1] =1

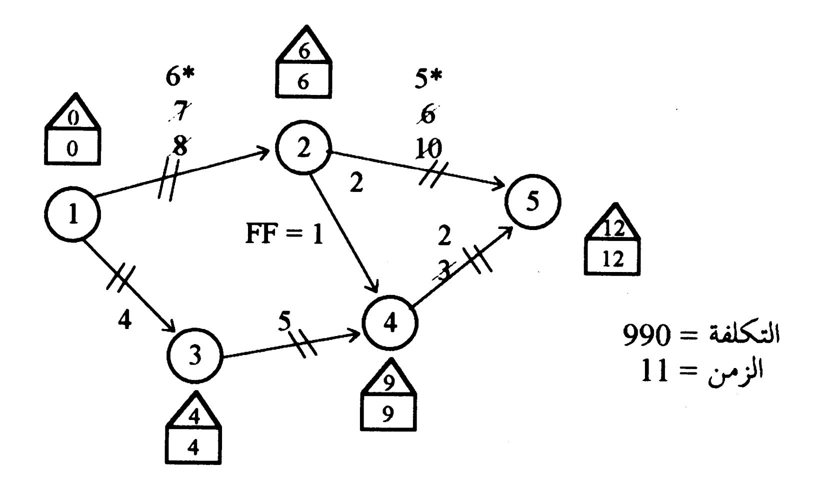
و FF يمكن حسابها من خلال كل خط تحكمي على حدة، وبما أن أقل قيمة زمن يمكن تقليصها هي واحد ولا يتعارض مع FF.

∴ التخطيط النهائي يساوي 11 وتكلفة تنفيذ المشروع يمكن حسابها على النحو الآتي:

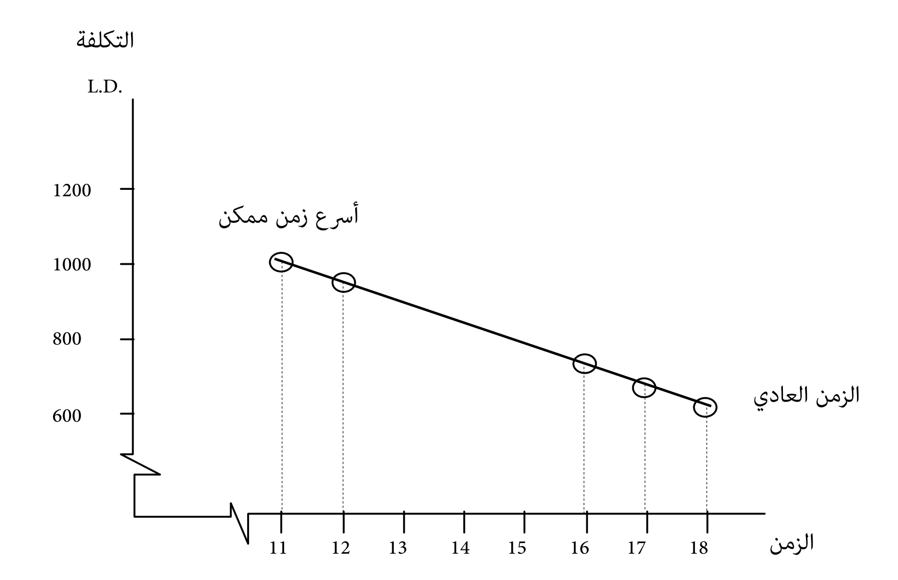
$$920 + (12 - 11) \times (10 + 60) = 990$$

ويبقى الخطان التحكميان ثابتان في الخطوة الأخيرة. وبما أن النشاطات الواقعة في الخط التحكمي 1 ← 2 ← 5 وصلت أسرع وقت ممكن وفقا للمعطيات.

∴ لا يمكن تقليل زمن المشروع كما هو موضح بالشكل الآتي:



وأن ملخص الحسابات يعطي بالشكل الآتي:


التكلفة
L.D.
1200
1000
800
600
أسرع زمن ممكن
الزمن العادي
11
12
13
14
15
16
17
18
الزمن

Some software packages for project management

Name	Source/Details
	(for addresses see list at end of chapter)
Project Scheduler	Scitor Corp.
SAS System	SAS
Project/2	Project Software & Development
Super Project Expert	Computer Associates
Artemis	Lucas Management Systems (see also Project
	Manager Today, Feb. 1992, pp. 42-45)
Project Manager Workbench	Hoskins
Open Plan	Welcome Software
Primavera	Prirnavera Systems
Trackstar	Cosar Project Management
Plantrac	Computerline
Prornis-PMS	(based on Arternis) (see Project Manager Today, Nov./Dec. 1992, pp. 30-33)
Project Guide	Deepak Sareen
Power Project	Asta
Pc Project 3	(see Project Manager To dat, Oct. 1992, pp. 34-36)

Types and capabilities of computer software pakages

1.	Simple:	Single-project planning Limited analysis (e.g. no rescheduling) Simple, easy to use and understand
	Single:	Single-project management (planning, scheduling control, monitoring) Comprehensive analysis (with progress reports, reschedulling, etc.)
	Multiproject:	Multiproject management (planning, schedulling control, monitoring) Comprehensive analysis and reports Uses common database

Typical capabilities:

1- Formats (activity on arrow or node)
2- Bar or Gantt chart displas/outputs
3- Schedule dates
4- Updating (e.g. with revised durations, schedule dates, etc.)
5- Sorting (i.e. listing of activities with dates, by department)
6- Resource aggregation and allocations
7- Cost controls and calculations
8- Calendar dates (i.e. internal calendar used to apply calendar dates to activities)
9- Reports(i.e. choice of report formats)
10- PERT calculations
11- Cost/duration comparisons
12- "What if?" calculations (e.g. calculate effects of changes in durations, resources, etc.)

10.9 التحكم في المشروع (Project control):

تبدأ أهمية الشبكة التخطيطية للمشروع أثناء تنفيذ المشروع، وذلك من خلال متابعة تسلسل الأنشطة والحرص على تحقيق الأزمنة في مواعيدها خلال عملية التنفيذ. إن تأثير تأخير أي زمن لأي نشاط داخل المشروع سوف يؤثر على الجزء الذي لم يكمل في المشروع بعد.

فمثلا: عند تنفيذ أي مشروع على مدى الزمن المخصص له، يراعى أن تكتمل الأنشطة في الزمن المخصص لها، وفي حالة التأخير مطلوب إعادة تخطيط وجدولة ما تبقى من تنفيذ المشروع، وهذا ما يقصد بالتحكم في المشروع.

10.10 مسائل:

1- شركة مساهمة تخطط لإنتاج منتج جديد، وترغب الشركة في تخطيط التسويق، وتشمل النشاطات اللازمة للتسويق القائمة الآتية:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	زمن النشاط (أسبوع)
A	الإعداد للمشروع وتحديد الميزانية	-	1
B	تدريب المنتجين لأداء العمل الخدمي	A	8
C	تدريب رجال البيع والتسويق	A	4
D	توزيع المنتج على مراكز التسويق	C	4
E	إعداد الدعاية بواسطة الإذاعتين المسموعة والمرئية	A	4
F	التعاقد مع الإذاعتين	E	1
G	صناعة الأفلام بالإذاعة المرئية	F	8
H	طباعة البرنامج للدعاية بواسطة المسموعة	F	4
I	اعتماد البرنامج المرئي من الإدارة	G	3
J	الدعاية بواسطة الجرائد	A	2
K	الدعاية لكيفية التعاقد	J	1
L	إعداد الدعاية بواسطة المطبوعات كمخطوط	K	4
M	طباعة المخطوط	L	4
N	توزيع المنتج بالجملة	D	2
O	توزيع المنتج للموزع الفردي	N	4
P	الندوات الإعلامية	B,O,I,H,M	0

2- مصنع حقائب اللدائن يحتوي على النشاطات التالية:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	الزمن (دقيقة)
A	قطع المادة البلاستيكية بشكل الحقيبة	-	5
B	تصنيع النموذج الخشبي	-	15
C	ثقب الفتحات اللازمة	A	5
D	طبع الصور اللازمة على الحقيبة	A	2
E	تثبيت البلاستيك على النموذج الخشبي	C , B	3
F	ربط حوامل الحقيبة	C , B	2
G	وضع الإشارات الأمنية لحفظ الحقيبة	D , E	1
H	تعليب الحقيبة للتسويق	F , G	1

أ - ارسم الشبكة التخطيطية للمشروع.

ب- أوجد الخط التحكمي للمشروع.

ج- أوجد FT ، FF لكل نشاط.

3- ضع علامة (✓) أو (✗) على المعلومات التالية:

1- النشاط الخامد في الشبكة التخطيطية دائما قيمته صفر ( )

2- يمكن أن يمثل أكثر من نشاط من خلال دائرتين ( )

3- الخط التحكمي في المشروع يمثل الحد الأدنى من الزمن اللازم لتكملة المشروع ( )

4- من الممكن أن يتأخر أي نشاط واقع في الخط التحكمي بدون أن يتأخر المشروع بالكامل ( )

5- أي شبكة تخطيطية لأي مشروع أكثر من خط تحكمي ( )

6- يختلف حساب الخط التحكمي بطريقة PERT عنها في CPM ( )

7- النشاط الغير واقع في الخط التحكمي لا يمكن أن يكون له قيمة صفر لـ TF ( )

8- النشاط الواقع في الخط التحكمي يشرط أن TF ، FF يساوي صفر ( )

9- من المستحيل أن تزيد زمن أي نشاط بعد قيمته العادية بدون زيادة تكلفته ( )

10- من المستحيل أن تأخر أي نشاط في الخط التحكمي دون أ، تأخر كل المشروع ( )

4- المعلومات التالية تعطي نشاطات لبناء مسكن جديد:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	الزمن (يوم)
A	تنظيف الموقع	-	1
B	إحضار الخدمات للموقع	-	2
C	حفر الموقع	A	1
D	حفر المجاري الخارجية	B , C	6
E	أعمال البناء	D	10
F	الأعمال الكهربائية	F	3
G	حسب الأرضيات	G	1
H	صب السقف	F	1
I	المرافق الأرضية	E , H	5
J	المظلات الخارجية	I	2
K	وضع العوازل الخارجية	F,J	1
L	تركيب النوافذ والأبواب	F	2
M	أعمال البدورات	L , M	4
N	وضع العوازل الداخلية	G , J	2
O	تغطية الجدران والأسقف	O	2
P	عزل السقف الخارجي	I , P	1
Q	التشطيب الداخلي	P	7
R	التشطيب الخارجي	I , N	7
S	أعمال الحدائق	S	3

أ- أرسم الشبكة التخطيطية للمشروع.

ب- احسب الخط التحكمي للمشروع

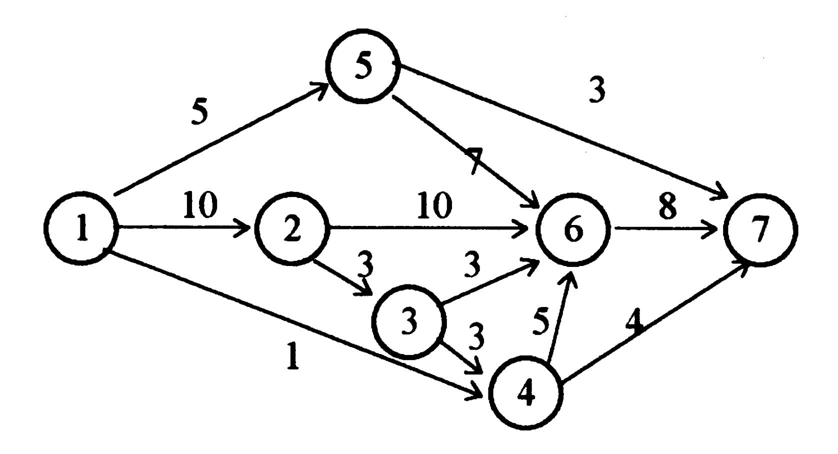
5- ترغب إحدى شركات القطاع العام في تحديد ميزانيته للسنة القادمة. عليه يجب تجميع المعلومات التالية؛ مثال: المبيعات، الإنتاج، الحسابات، والمالية. وكل هذه النشاطات مدرجة حسب أزمنتها في الجدول الآتي:

رمز النشاط	وصف النشاط	النشاط السابق	الزمن (يوم)
A	حساب تنبؤ المبيعات	-	10
B	دراسة السوق المنافسة	-	7
C	تصميم المنتج ومعدات الإنتاج	A	5
D	إعداد برمجة الإنتاج	C	3
E	تقدير تكاليف الإنتاج	D	2
F	إعداد ثمن المبيع	B , E	1
G	إعداد الميزانية العامة	14 E , F	

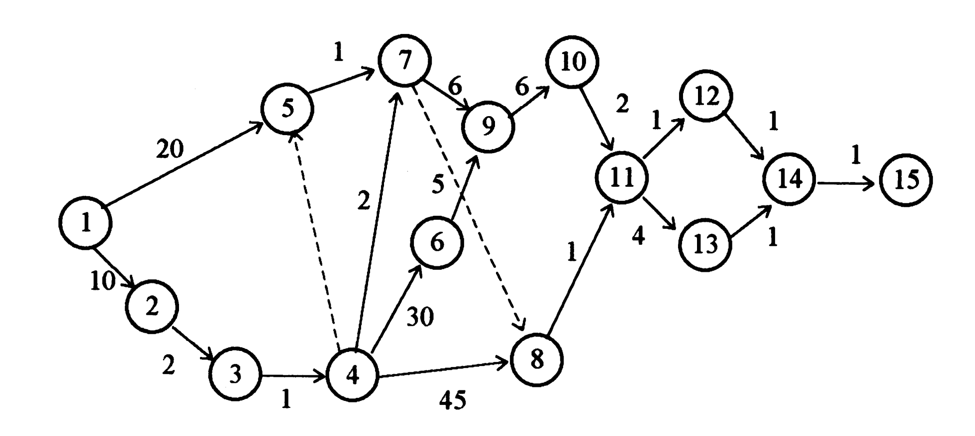
أ- أرسم الشبكة التخطيطية لتنفيذ المشروع.

ب- احسب الخط التحكمي للمشروع

6- احسب الخط التحكمي للشبكة التخطيطية الآتية:



7- أحسب الخط الحرج للشبكة التخطيطية الآتية:

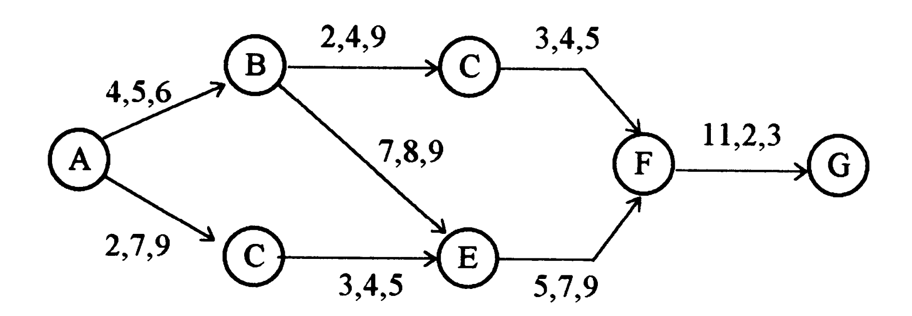


8- مشروع يحتوي على تسعة نشاطات، إذا علمت بأن الزمن التفائلي، والزمن المتوسط والزمن التشائمي وأسبقية رغب النشاطات على النحو الآتي:

أسبقية الأنشطة	الأزمنة			رمز النشاط
-	4	3	1	A
-	1	4	2	B
A	1	2	1/2	C
A	1	5	2	D
B , C	3	6	1	E
D , E	7	2	1	F
D , E	9	4	3	G
F	5	3	2	H
G	8	5	4	I

احسب الخط التحكمي للمشروع.

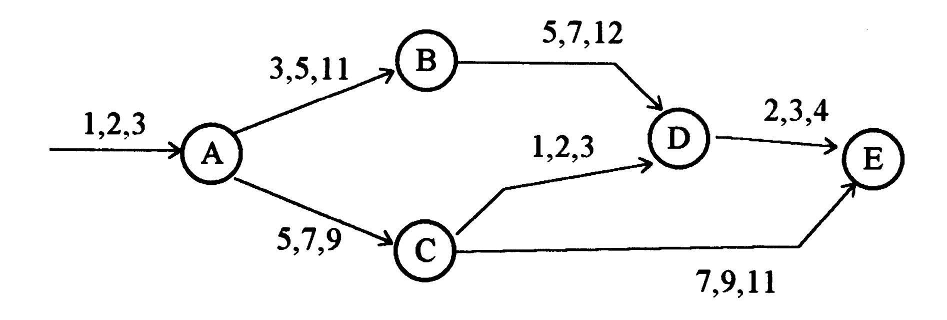
9- إذا أعطيت الشبكة التخطيطية للمشروع الآتي:



أ- أرسم الخط التحكمي للمشروع.

ب- احسب الانحراف المعياري لكل نشاط.

10- إذا أعطيت الشبكة التخطيطية للمشروع الآتي:



أ - ما هو ES_i للمشروع؟

ب- ما هو الخط التحكمي للمشروع؟

ج- ما هو الانحراف المعياري للخط التحكمي؟

د- ما هو الاحتمال الذي يسمح لاستكمال المشروع في 20 أسبوعا؟

11- أجب عن الأسئلة النظرية التالية:

أ - عرف: النشاط الوهمي
النشاط السابق
النشاط اللاحق
النشاط المتوازي.

ب- عرف: المشـروع
الخط التحكمي
الزمن التفائلي
الزمن التشائمي.

ج- عرف: الوقت المبكر لحدث النشاط
الوقت المتأخر للحدث.

د- لماذا تزيد تكلفة النشاط إذا تم التعجيل في تنفيذه؟

الفصل الحادي عشر

نظام التحكم بالتخزيـن

يناقش هذا الفصل هيكلية نظام التخزين، ونموذجه العام. كما يسلط الضوء على بعض التعريفات المهمة في نظام التخزين، ويسرد أمثلة عن خط طلب الكمية الاقتصادية، ونمط طلب الكمية الاقتصادية مع استمرار الاستهلاك والسماح بفقدان المخزون، وأنماط التخزين المعتمدة على تغير أسعار المواد المخزونة، ونموذج الطلبية الاقتصادية عندما تكون الفترة الزمنية ثابتة. ولزيادة الفائدة، يتضمن الفصل دراسة حالة حول مخزن الإطارات بالشركة العامة للشاحنات.



الفصل الحادي عشر

نظام التحكم بالتخزين

Inventory Control System

11.1 مقدمة:

تعني بنظام التحكم بالتخزين (أو الرقابة المخزنية) الوسيلة التي يمكن بها تدبير كميات المواد المناسبة وفقا للمواصفات المعينة في الوقت المناسب والمكان المناسب بأقل تكلفة ممكنة. ومن هذا المفهوم يتضح لنا أن نظام التحكم بالتخزين (Inventory control) ليس مجرد ملاحظة التخزين كما ونوعا، وإنما هو نظام متقدم تستخدم فيه معادلات رياضية وطرق إحصائية وأدوات متعددة.

11.2 المجالات التي يشعلها نظام التحكم بالتخزين:

يستخدم النظام في عدة مجالات، في مقدمتها:

1- المواد التي تم التعاقد على شرائها من مناشئ داخلية أو خارجية.

2- المواد التي تسليمها إلى المخازن فعلا والتي دخلت في قوائم المخازن.

3- المواد التي تم صرفها من المخازن إلى طالبيتها بناء على أوامر صرف معتمدة ولا يشترط بهذه المواد أن يكون ثمنها مدفوعا مقدما.

4- المواد الموجودة فعلا في المخازن في متناول اليد.

5- المواد المحتجزة لعمليات معينة والمواد التي تم التعاقد على صرفها من المخازن ولم تصرف بعد ولكنها تنتظر أوامر من المشتري لنقلها من المخازن إلى المكان الذي يرغب المشتري.

6- المواد التي سهل الدخول عليها بسهولة ويسر من الموردين عند الحاجة إليها والتي يعتبرها مسؤول المخزن موجودة فعلا في المخازن.

7- كافة المواد التي تم استرجاعها إلى المخازن أو المواد التي تنتظر دورها لدخول المخازن، وتشمل هذه المواد كل ما موجود بالجمارك ومراكز الفحص والاستلام ... الخ.

11.3 أهداف نظام التحكم بالتخزين (Objectives of the system):

يمكن تلخيص هذه الأهداف كما يلي:

1- حساب الحجم الأمثل لكمية المخزون، وعدد دفعات الشراء، وفترات التوريد، وشراء الاحتياجات ذات الاستهلاك المتغير، ومعدل التخزين، ومتوسط التخزين، واحتياطي الطوارئ، ورصيد الأمان .... الخ.

2- التأكد من أن الإنتاج لا يتأثر أو يتغير أو يتوقف بسبب نقص في المواد أو الأخبرة أو قطع الغيار.

3- التأكد من وجود كميات كافية من المواد المخزونة لمواجهة الطلب غير الطبيعي عليها، مثل ازدياد الطلب على مادة ما فجأة، أو حدوث حالات طارئة تستوجب مواد وأخيرة ومعدات فورية وبكميات كافية لسد الحاجة، لم يكن مخططا لها مسبقا.

11.4 شروط نـجاح التحكم بالتخزين (Prerequisites of the system):

لابد من توفر شروط أساسية لتطبيق نظام التحكم بالتخزين بشكل فاعل وكفء. ومن بين أهم هذه الشروط ما يلي:

1- ضرورة اختيار الأنظمة لترميز المواد.

2- ضرورة وضع قواعد خاصة لاختيار أصناف المواد (كتصنيفها حسب أهميتها الاستهلاكية فعلا).

3- تحديد طريقة سحب المواد (Lifo, Fifo) مع الأخذ بنظر الاعتبار:

أ - طبيعة المادة.

ب- حالة المادة عند الاستلام ومستوى نوعيتها.

4- تحديد مستويات الخزين التي تلائم نظام التحكم بالتخزين، والذي يتم اختياره (كالحد الأدنى، الحد الأعلى، مستويات إعادة الطلب ... الخ).

5- تحديد الإجراءات البديلة اتخاذها في حالات نفاذ خزين أي من المواد لئلا يكون هناك تأخير ملحوظ عن سير العمل.

بعد القيام بالخطوات سابقة الذكر يمكن عندئذ من:

أ - قياس المستوى الحقيقي لكل مادة من المواد.

ب- مقارنة المستوى الفعلي مع المستويات المخططة مسبقا لأغراض الرقابة (التحكم).

ج- اتخاذ الإجراءات اللازمة لتصحيح الانحراف.

د- القيام بعملية المتابعة عند الحاجة.

11.5 دور وأهمية التحكم في التخزين

(Role & Importance of the system)

إن عملية التخزين في القطاعات الصناعية والإنتاجية خصوصا لها أهمية حاسمة بالنسبة لنجاح هذه القطاعات وسير العمل المنتظم والمنسق فيها، فالاحتفاظ بمخزون أكبر مما يجب يعني وجود رأسمال معطل كان من الممكن استخدمه في نشاطات أخرى مريحة ومفيدة، للمؤسسة أو القطاع برمته، إلا أنه من جهة أخرى، فإن نقص المخزون عند الحد المناسب يعني احتمالات تعطل العملية الإنتاجية والفشل بالوفاء باحتياجات المستهلكين أو المنتفعين (في حالة توقف مصفي ما عن العمل مثلا بسبب نقص في المواد والمعدات)، واحتمال دفع أثمان عالية عند الشراء العاجل أو بكميات صغيرة نسبيا - عندما يقصر المخزون عن الوفاء بمتطلبات الإنتاج - كذا زيادة تكاليف النقل.

ويعتبر التخزين من العوامل المؤثرة على الكفايات الإنتاجية. فالمخزون السلعي يعد أهم بند من بنود الأصول المتداولة بالنسبة للمؤسسات الصناعية، وأكثرها خطورة على المركز المالي، وتأتي أهمية مشكلة المواد أساسا، من عمق الآثار المترتبة على القرارات المتعلقة بشراء المواد وتخزينها. فالمواد عنصر مهم من عناصر رأس المال العامل، واستخدامها الاقتصادي يعني كفاءة استخدام المواد المتاحة، كما أنها في الوقت ذاته أهم (مدخل) من مدخلات العملية الإنتاجية،ووجود (نظام فعال لإدارتها) في مراحل حياتها - من طلب فشراء، وفحص واستلام، فتخزين وصرف، واستخدام - له ولاشك تأثير بالغ على فاعلية وكفاءة النظام الإنتاجي بوجه خاص، بل وعلى كفاءة المؤسسة الإنتاجية لكلها بوجه عام.

فالقطاع النفطي، مثلا، من الحيوية والحساسية بمكان الأمر الذي يتطلب من المسؤولين التأكد من كفاءة أحد شرايينه الحيوية وهو (الخزين).

فكل شيء يعتمد على مدى توفر المواد الداخلية في العملية الإنتاجية (التكرير مثلا) بالإضافة إلى نوع وكمية هذه المواد. والأهم من ذلك كله سرعة توفر هذه المواد في حالة الحاجة إليها.

وإذا ما أخذنا دور التخزين في عملية الحماية من التوقف الإنتاجي، فإننا نجد دوره يتمركز في الآتي:

1- يقوم التخزين بتوفير مستلزمات الصيانة وتصليح وسال الإنتاج وقطع الغيار والأدوات الاحتياطية.

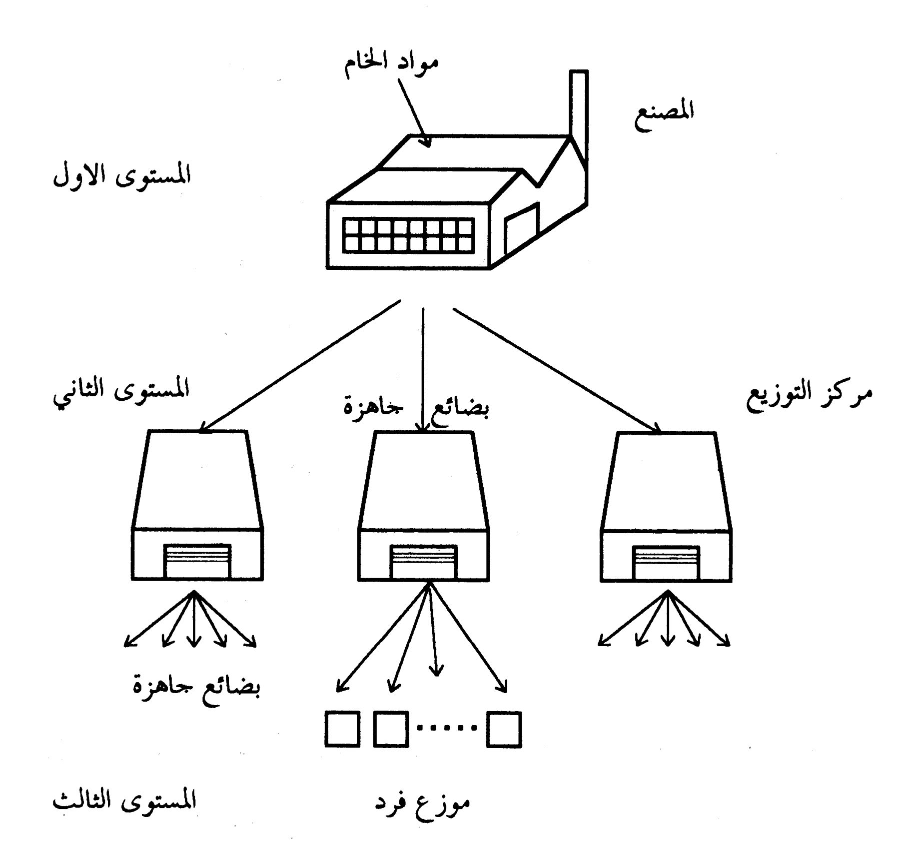
2- يقوم التخزين بتموين خطوط الإنتاج وإدارات الخدمات بحاجتها من المواد الأولية ونصف المصنعة وخلافها والخاصة بعمليات الإنتاج واحتياجات الإدارة المساعدة مثل التغليف والتجهيز.

3- تقوم إدارة المخازن باستقبال المواد الواردة إلى المخازن وفحصها وضمان جودتها

قبل القيام بعملية خزنها وتصنيفها وتبوبيها وترميزها وذلك منعا من استلام أصناف تالفة أو قابلة للتلف تؤثر على الإنتاج وتزيد التكاليف.

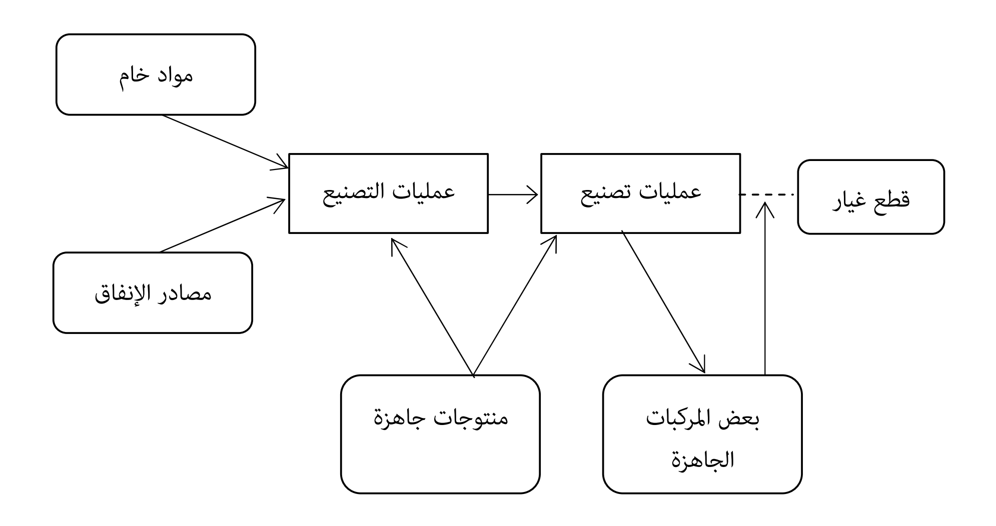
11.6 هيكلية نظام التخزين (Structure of Inventory System)

يتكون هذا النظام من جزئين رئيسيين هما: توزيع البضائع وتصنيع البضائع. والشكل رقم (11.1) يوضح مخططا لمسارات ومواقع نظام التخزين.



شكل (11.1) نظام التوزيع في المخزون

وأحيانا يمكن أن يحتاج إلى نظام التخزين حتى في المراحل الداخلية للتصنيع كما هو موضح في الشكل (11.2).



شكل (11.2) نظام التخزين في منتصف المصنع

11.7 النموذج العام لنظام التخزين (Inventory System Model)

إن الهدف الأساسي لنموذج نظام التخزين للإجابة على سؤالين هما:

1- كم هي كمية الطلبية الواحدة؟

2- متى يتم الأمر لهذه الطلبية؟

للإجابة على السؤال الأول هو تحديد كمية الطلبية المناسبة والتي تحقق بالأحرى نظام التخزين (Optimum order) أما الرد على السؤال الثاني والذي يعتمد على نوع نظام التخزين - هل أن نظام التخزين يعتمد على نظام الفترة الثابتة - أو الكلمة الثابتة.

ويقصد بنظام الفترة الثانية (كل يوم - أسبوع - شهر - سنة ... الخ) أو الكمية الثانية التي (10 - 100 - 1000 ...؟) عند تخلص يكون الطلب جاهز. وعليه يمكن تصنيف هذه الأنظمة على النحو الآتي:

1- نظام الفترة الثابتة (Periodic review case): ويعبر عنه باستقبال طلبية ثابتة عند نهاية كل فترة محددة.

2- نظام الكمية الثابتة (Continuous review case): ويعبر عنه بإضافة كمية ثابتة عندما يصل مستوى المخزون في كمية ثابتة وتسمى هذه النقطة بكمية إعادة الطلبية (Reorder point) وكمية الطلبية تسمى بالطلبية المراد بها (Order quantity).

ومن خلال تحديد نقطة إعادة الطلبية وكمية الطلبية المطلوبة يمكن حساب تصغير التكلفة العامة لنموذج التخزين والذي يمكن تعريفه على النحو الآتي:

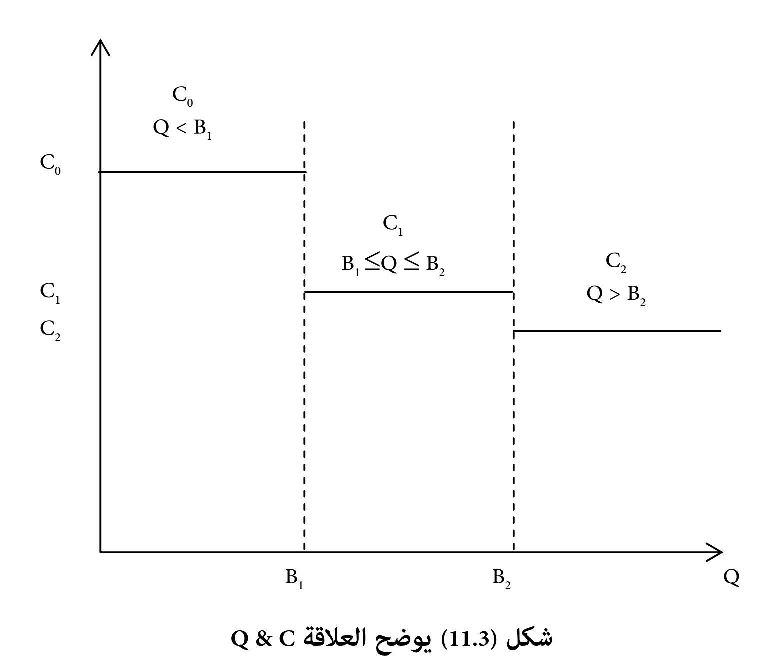
مجموع تكلفة نظام التخزين = (تكلفة شراء المنتوجات) + (تكلفة إعداد الطلبية) + (تكلفة حفظ الطلبية) + (تكلفة عدم توفر الطلبية).

11.7.1 تكلفة المنتج الواحد Unit cost of product:

يعبر عن تكلفة المنتج الواحد بثمن الشراء والتي يعتمد على كمية المنتوجات حيث:

$$C = F(Q)$$

C ثمن الشراء دالة في كمية المنتوجات المخزون Q. وكلما زادت Q قلت C (ثمن المنتج الواحد) كما هو موضح بالشكل (11.3).



شكل (11.3) يوضح العلاقة Q & C

11.7.2 تكلفة حفظ المخزون (H) Inventory holding cost:

تشمل تكلفة حفظ المخزون - تكلفة المخزون - التأمين على البضائع والمنتوجات - ثمن المواد المسكرة أو تالفة - الضرائب على متوسط المخزون بالإضافة إلى نقل المواد. ويعتمد (H) على حجم المخزون.

11.7.3 تكلفة إعداد الطلبية (S) Replenishment cost:

يشمل تكلفة إعداد الطلبية: الرسوم الثابتة - اختبار المنتوجات - فحصها - إعداد الطلبيات - ترتيبات العاملين في الإعداد مباشرة وغير مباشرة - الهواتف - البريد المصور - التخليص الجمركي - إجراءات الاعتمادات.

11.7.4 تكلفة فقدان المخزون (II) Stock out or shortage cost:

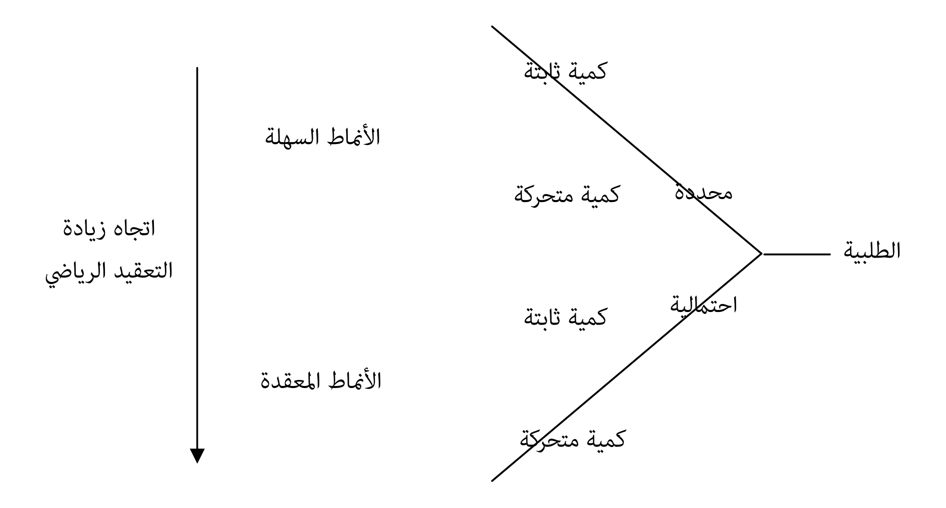
يشمل تكلفة فقدان المخزون عند طلب كمية من المخزون ولم تكن متوفرة وبالتالي يصبح الزبون في حالة انتظار المخزون - ويمكن حساب هذه التكلفة كدالة في زمن التأخر - أو دالة في فقدان الربح الناتج لو كانت المواد المخزنة موجودة في المخزن في الزمن المطلوبة فيه. وأحيانا يشار لها بفقدان فرصة المبيعات (Lost sakes cose).

11.7.5 الطلبية (Order):

من المعروف أن الغرض من تكلفة حفظ المخزن (H) هو توفير الطلبية المناسبة في الوقت المناسب. عليه فإن من الضروري جدا أن يتم التخطيط لكمية الطلبية باستخدام أحد الطرق الإدارية لتنبؤ المخزون، مثال طريقة المتوسط الحسابي - أو المنحنى اللوغارتمي - والانحدار الخطي.

ويشار للطلبية أحيانا إلى تخطيط الإنتاج (Production) لفترة قصيرة أو طويلة المدى.

الشكل (11.4) يوضح أنواع مختلفة من الطلبيات التي يمكن أن يعترضها أنماط التخزين.



شكل (11.4)

11.8 بعض التعريفات المهمة في نظام التخزين:

1- الزمن اللازم لتوفير الطلبية «إصدار الأمر Lead time »:

عندما يصدر الأمر بتوصيل طلبية معينة معروفة الكمية، فإن الزمن للإعداد في الوقت المناسب يسمى (Lead time) (L)

2- زيادة المخزون (Stock replenishment)

هي كمية المخزون التي يمكن أن تضاف لحفيا أو بطريقة منتظمة - ويمكن إضافة المخزون لحظيا عندما تكون المواد تورد من الخارج وتضاف لحظيا عندما يتم صناعتها داخليا. وفي جميع الأحوال زيادة المخزون وإنما تكون ذات قيمة موجبة.

3- الخطة الزمنية (Time horizon):

تعرف الفترة الزمنية للمخزون بأنها الفترة التي يمكن أن يتحكم بكمية المخزون، ويمكن أن تكون هذه الفترة محددة أو غير محددة. وتعتمد على كمية الطلبية ومدى معرفتها على مدى الفترة الزمنية.

4- عدد مصادر التوريد (Number of supply):

من الممكن أن يحتوي نظام التخزين على عدة مخازن مختلفة المستويات حيث أن هذه المخازن تكون مركزية بالنسبة للأخرى وتقوم بدور المورد لبعضها.

5- أنواع المواد المخزونة (Number of stored times)

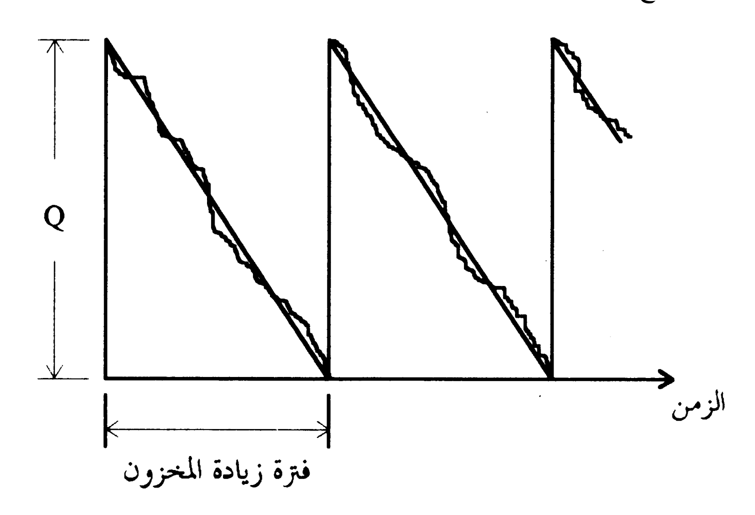
تحتوي أنظمة التخزين على عدة أنواع من المواد التي يمكن تخزينها وبالتالي يراعي في طرق حفظها وطلبها.

11.9 نمط طلب الكمية الاقتصادية

(Economic order quantity model) (E.O.Q)

نموذج E.O.Q بإضافة المخزون في كل دورة زمنية محددة الطلبية تصدر بمعدل ثابت في الزمن قدرها D. وكما هو موضح بالشكل (11.5) نلاحظ أن كلما وصل

المخزون إلى الصفر تصل كمية المخزون قدرها Q لحظيا إلى مستوى Q وليس يسح بنفاذ المخزون في تطبيق هذا النموذج.



شكل (11.5) طبيعة دورة التخزين

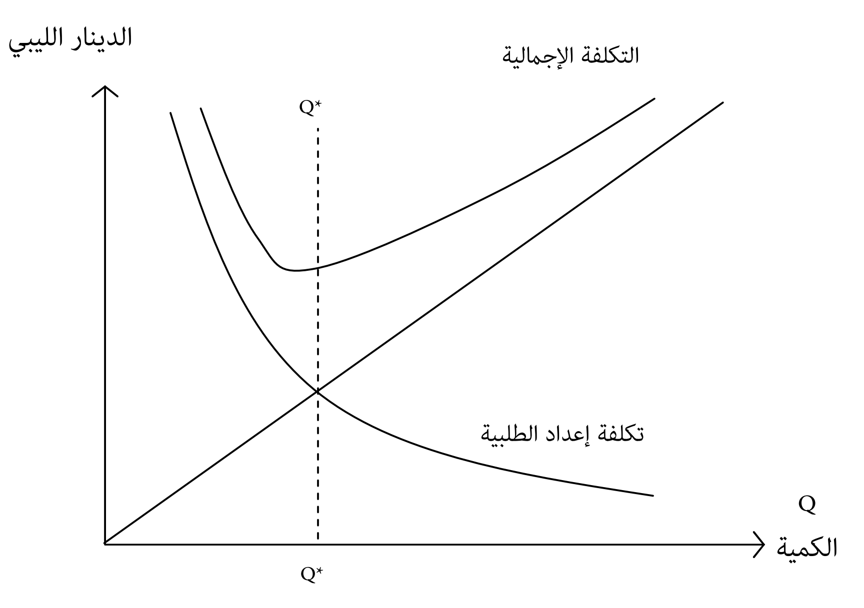
إن التكلفة الإجمالية خلال الدورة الزمنية للتخزين والاستهلاك هي مجموع تكاليف حفظ المخزون + تكاليف إعداد الطلبية + ثمن المواد المخزنة. فلو فرضنا أن الخطة الزمنية قدرها سنة، فإن D ترمز للطلبية السنوية. وأن VD تكلفة المنتج سنويا.

أما تكلفة حفظ المخزون فتحسب بواسطة متوسط المخزون $=\frac{1}{2}Q$ وأن تكلفة إعداد الطلبية يعتمد على عدد الطلبيات $=\frac{D}{Q}$

ويمكن إعطاء التكلفة الإجمالية على النحو الآتي:

$$TQ=\frac{1}{2}c_1Q+c_2\frac{D}{Q}+VD$$

التكلفة الإجمالية = تكلفة حفظ المخزون + تكلفة إعداد الطلبية + تكلفة المخزون



شكل (11.6) العلاقة بين تكاليف التخزين

وحيث أن تصغير التكلفة الإجمالية للمخزون يعتمد على الكمية Q

∴ باستخدام نظرية التفاضل:

$$TQ = \frac{1}{2}c_1Q + c_2\frac{D}{Q} + VD$$

$$\frac{dTC}{dQ} = \frac{c_1}{2} + \left(-\frac{Dc_2}{Q_2}\right) + 0$$

وعند أقل قيمة لتكلفة الإجمالية للتخزين $\frac{dTC}{dQ} = 0$

$$\therefore \frac{c_1}{2} = \frac{D}{Q^*}c_2$$

$$\therefore Q^* = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}$$

ويمكن حساب Q^* بواسطة الرسم كما في الشكل (11.5).

وبما أن في النموذج الأولي لنظام التخزين بافتراض أن الطلبية السنوية D ثابتة وأن زمن إحضار الطلبية المناسبة Q^* محدد. ولا يسمح بالأمان الاحتياطي. فإنه يمكن حساب الكمية التي يتم فيها إعداد الطلبية الجديدة، بالمعادلة التالية:

$$R = \bar{d}L$$

حيث R الكمية التي يتم عندها الشروع في إعداد الطلبية الجديدة.

$\bar{d}$ متوسط الصرف أو الاستهلاك اليومي (ثابت)

L الزمن الذي يتم عنده الشروع في إعداد الطلبية الجديدة.

حيث $\bar{d} = \frac{D}{365}$

ويمكن حساب: تكلفة التخزين الصفر (Minimum total cost)

$$Tc^* = \sqrt{\frac{2Dc_2}{2}}\,c_1 + \frac{D}{\sqrt{\frac{2Dc_2}{2}}}\,c_2 + (Tc^*)$$

$$Tc^* = \sqrt{2c_2Dc_2}$$

مثال 11.1:

فرع الشركة العامة للكهرباء يرغب في وضع خطة لتنظيم مخازن صيانة الإنارة العام في الشوارع والطرق الرئيسية بمدن المنطقة الوسطى. ومن خلال الخبرة العملية لفرع الشركة قدرت الطلبية السنوية بمقدار 200,000 مصباح كهربائي في السنة ومتوسط تخزين المصباح ١٠٠ درهم. وإعداد الطلبية لتوريد المصابيح للمخازن 2000 د.ل للطلبية. ومتوسط الاستهلاك اليومي للمصابيح $\frac{200000}{365}$ وزمن إعداد الطلبية 15 يوما. أحسب الكمية المناسبة للطلبية لتصغير تكلفة التخزين الإجمالية. وأحسب التكلفة الصغرى للتخزين.

الحل:

$$Q^*_{opt} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}$$

$$Q^*_{opt} = \sqrt{\frac{2(200.000)2000}{2}}$$

$$Tc^* = \sqrt{8000000000}$$

$$R = \bar{d}\,L = \frac{200,000}{365}(15) = 8219.17$$ مصباح

$$\text{Min Tc} = \frac{D}{Q^*}c_2 + \frac{Q^*}{2}c_1$$

$$\text{Min Tc} = \frac{200,000}{89442.7}(2000) + \frac{89442.7}{2} \times 0.1$$

$$= 4472.10 + 4472.135$$

$$\text{Min Tc} = 8944.235$$ دبكارلين

11.10 نمط طلب الكمية الاقتصادية مع استمرار الاستهلاك:

Economic fixed order quantity with usage model

من المعروف من الناحية العملية أن يحدث زيادة في حجم المخزون واستهلاكه في آن واحد، وهذه الحالة تحدث عندما يتعدى جزء من الإنتاج الجزء الذي يليه في حالة الإنتاج. ووفقا لهذه الظروف يصبح النمط السابق على النحو الآتي:

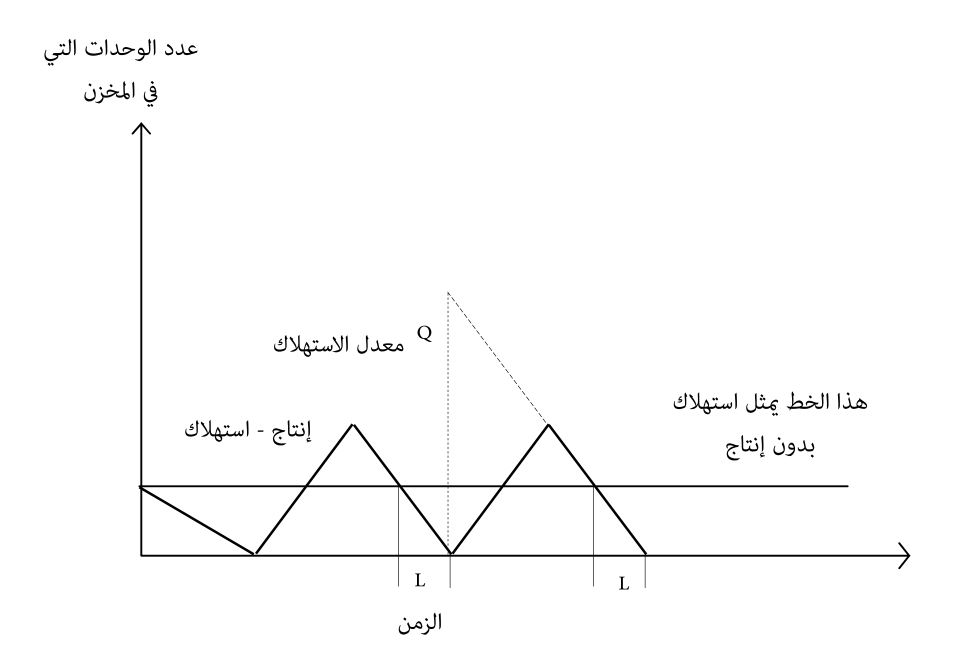
$$TC = Qc_1\frac{(P - d)}{2P} + \frac{D}{Q}c_2 + DV$$

حيث d: كمية الطلبية الثابتة

p: كمية الإنتاج الثابت

وبتطبيق التفاضل الأول يمكن الحصول على أصغر Q_{opT} مناسبة وأصغر تكلفة ممكنة للتخزين TC_{opT} على النحو التالي:

$$Q^*_{opt} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1} + \frac{P}{(P-d)}}$$



شكل (11.7)

مثال 11.2:

منتج x يعتبر كمخزون أساسي لشركة ما. والمنتج النهائي يتم بواسطة خط تجميع بأن العمل اليومي. واحدة مركبات المنتج x يسمي x_1 والذي ينتج بواسطة قسم إنتاجي آخر بمعدل 100 منتج/ اليوم.

ويستهلك مركب المنتج x (x_1) منتج/ اليوم. فإذا علمت بأن المعلومات التالية: أحسب الطلبية الاقتصادية Q_{opT}.

معدل الاستهلاك اليومي (d) = 40 وحدة

الطلبية السنوية (D) = 10.000 (يوم 250 × 40)

الإنتاج اليومي (P) = 100 وحدة

تكلفة إعداد الطلبية c1 = 50 د.ل

متوسط تكلفة التخزين (الحفظ) السنوي c_1 = 0.5 د.ل / الوحدة

R d L = 40 (7) = 280 وحدة

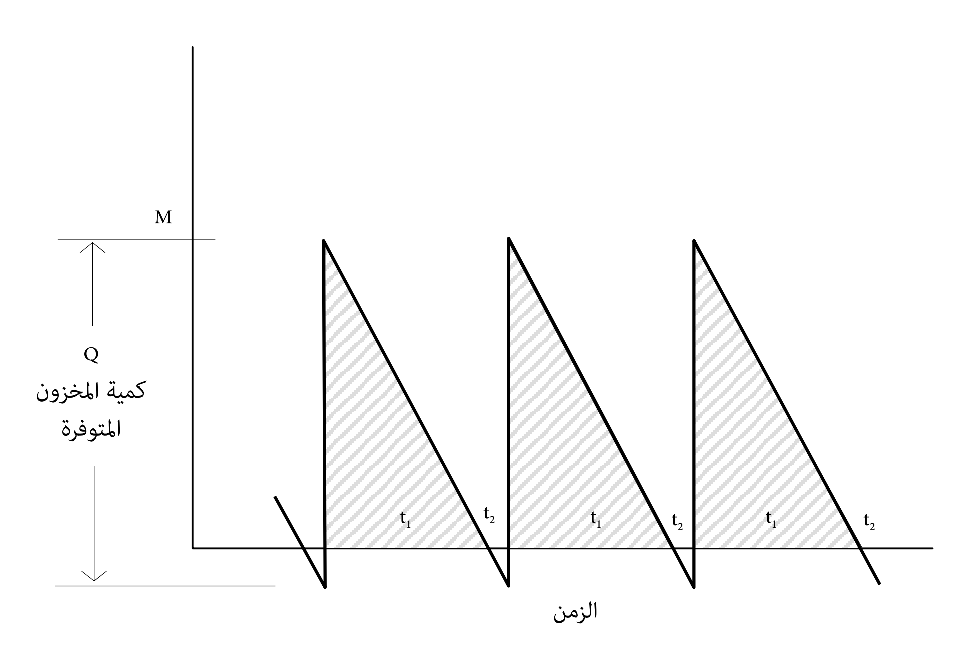
$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1} \cdot \frac{P}{P-d}}$$

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2(10.000)}{0.50} \cdot \frac{100}{100-40}} = 1826 \quad \text{وحدة}$$

11.11 نمط طلبية الكمية الاقتصادية مع السماح بفقدان المخزون

(Fixed - order quantity with backorders)

في التطبيقات العملية توجد بعض الحالات التي يحدث فيها عدم توفر الطلبية أثناء طلبها من المخازن - وعدم توفر المخزون يغطي حال الإشعار بعدم توفره في مرة واحدة. كما هو موضح بالشكل (11.8).



شكل (11.8) يوضح خط تحديد الطلبية الاقتصادية والسمح

بحدوث النقص في المخزون عند زمن الطلبية

حيث M = كمية الطلبية الثابتة.

Q = كمية الإنتاج الثابت.

t_1 = الفترة التي يتوفر فيها المخزون عند الطلب.

t_2 = الفترة التي لا يتوفر فيها المخزون عند الطلب.

c_1 = تكلفة حفظ الوحدة المخزونة في السنة.

c_2 = تكلفة فقدان الوحدة من المخزون عند الطلب.

c_3 = الطلبية السنوية.

D = كمية الإنتاج الثابت

وبناء على شكل (11.8)

متوسط المخزون أثناء الفترة المتوفر فيها الطلبية

$$\frac{M}{2}t_1$$

$$\frac{M}{2}t_1c_1$$

متوسط حجم المخزون الغير متوفر خلال الفترة t_2

$$\frac{Q-M}{2}t_2$$

وتكلفة

$$\frac{Q-M}{2}t_2c_3$$

مجموع التكلفة خلال الفترة $t_1 + t_2$

$$\frac{M}{2}t_1c_1 + \frac{-M}{2}t_2c_3 + c_3$$

وبما أن الطلبيات تنجز خلال سنة فإن عدد الطلبيات خلال سنة تساوي:\

عدد الفترات = $\left(\frac{D}{Q}\right)$

عليه فإن التكلفة الإجمالية للتخزين:

$$T_c = \frac{D}{Q}\left(\frac{M}{2}t_1c_1 + \frac{Q-M}{2}t_2c_3 + c_2\right)$$

وبواسطة تشابه المثلثات واستخدام التفاضل لـ T_c بالنسبة إلى Q و M

$$\therefore Q^*_{opT} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}\ \sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}}$$

$$MQ^*_{opT} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}\sqrt{\frac{c_1+c_3}{c_3}}$$

فإن المعادلة الأولى تعطي حجم الطلبية المناسبة والمعادلة الثانية تعطي أعظم مستوى لحجم المخزون.

وللإيجاد طول الفترة الزمنية ما بين الطلبيات وذلك بالتعويض عن Qبـ $\frac{D}{T}$ في المعادلات السابقة ونحصل على T على النحو الآتي:

$$T = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}}$$

مثال 11.3:

مصنع طلبية السنوية الثابتة تقدر بـ 10.000 وحدة/ سنويا.

وتكلفة إعداد الإنتاج 150 د.ل وتكلفة حفظ المخزون للوحدة سنويا 2.0 د.ل. فإذا حصل في عدم توفر الإنتاج على الطلبية فإن تكلفة عدم توفر الوحدة المخزون 5 د.ل. علما بأن المخزون يوفر خلال حال فقدان وفي أقل فترة ممكنة (t_2). المطلوب حساب حجم الطلبية المناسبة اقتصاديا.

الحل:

$D = 10.000$ وحدة

$c_2 = 150$ د.ل

$c_1 = 2$ د.ل

$c_3 = 5$

$$Q^*_{opT} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}} \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(10.000)\,150}{2}}\ \sqrt{\frac{2+5}{5}} = 1445.3$$ وحدة

كمية المخزون العظمى عند وصول الطلبية (M)

$$M = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}\ \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,(10.000)\,150}{2}}\ \sqrt{\frac{3}{2+5}}$$

$M = 1035$ وحدة

عدد الوحدات المطلوبة وغير المتوفرة في فترة الطلبية

$M - Q = 1035 - 1445.3$

$= -410$ وحدة

الزمن المثالي ما بين فترة إحضار أي طلبيتين (T)

$$T = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}\ \sqrt{\frac{c_1 + c_3}{c_3}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2\,(150)}{1000(2)}}\ \sqrt{\frac{2+5}{5}} = 0.145$$ سنة

$$T = 7\frac{1}{2}$$ أسبوعاً

11.12 أنماط التخزين المعتمدة على تغير أسعار المواد المخزونة

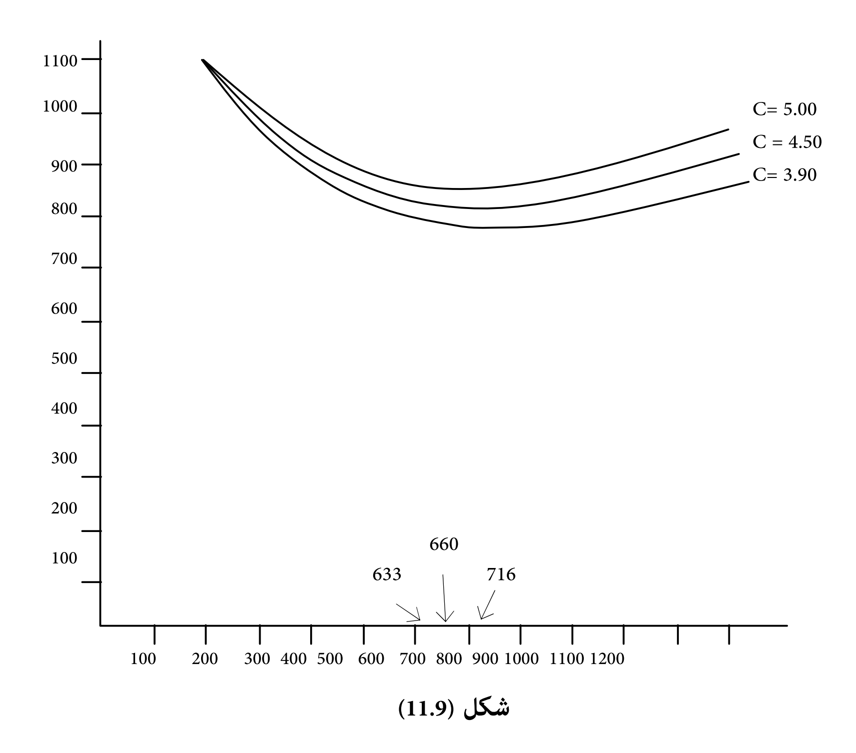
(Price - break models)

من المعروف بأن ثمن البيع أو تكلفة الوحدة المنتجة يتغير وفقا لحجم الطلبية - ويعتبر هذا التعبير تغيرا متقطعا وليس تغيرا مستمرا فعلى سبيل المثال لا الحصر تنتج ما يكلف 10 درهم إذا أنتجنا منه 1-99 (مطبوعة معنية) ويكلف 7 دراهم إذا أنتجنا منه

100 إلى 200 مطبوعة ويكلف 3 دراهم إذا أنتجنا منه أكثر من 500 مطبوعة. فإذا أردنا أن تحدد الكمية المناسبة فيستوجب علينا استخدام نموذج لتحديد الطلبية المناسبة.

إن التكلفة الإجمالية لكمية المناسبة والتي تؤدي إلى تصغير التكاليف الإجمالية يمكن حسابها وفقا للمثال التالي:

إذا فرضنا أن تكلفة حفظ المخزون تمثل كنسبة من ثمن القطعة المخزونة والتي أحيانا لا يتطلب حساب EOG عند كل سعر. ومن الطبيعي أن أكبر كمية اقتصادية تعطي عند أقل أسعار وهكذا. الشكل (11.9) يوضح العلاقة بين EOG المختلفة والأسعار المختلفة.



شكل (11.9)

مثال 11.8:

إذا علمت بأن:

$D = 10.000$ وحدة

$c_2 = 20$ L.D

$c_1 = 20\%$ من سعر التكلفة

$c =$ تكلفة الوحدة

حيث $c = 5$ د.ل إذا كانت الطلبية من 0-499 وحدة.

$c = 4.5$ د.ل إذا كانت الطلبية من 400-999 وحدة.

$c = 3.9$ د.ل إذا كانت الطلبية من 1000 وأكثر. ←

$$Tc = Dc + Q^{*}_{opT} = \frac{D}{Q}c_2 + \frac{Q}{2}c_1$$

$$Q_{opT} = \sqrt{\frac{2Dc_2}{c_1}}$$

$\therefore Q_{opT}$ عند $c = 5$ $Q_{opT} = 663$ وحدة

$\therefore Q_{opT}$ عند $c = 4.5$ $Q_{opT} = 666$ وحدة

$\therefore Q_{opT}$ عند $c = 3.9$ $Q_{opT} = 716$ وحدة

والجدول (11-1) يوضح طريقة الحسابات عند مختلف الكميات والأسعار والتي بناء على هذه المفاضلة يمكن للموردين اتخاذ اختيار أفضل كمية وأفضل سعر للإنتاج.

جدول (11.1)

الكتلة	السعر	Q = 633 C = 3 D. L.	Q = 633 C = 3 D. L.	Q = 633 C = 3 D. L.	أكثر من 1000
تكلفة حفظ المخزون $\frac{Q}{2}C_1$	$(4.5)(0.2)\frac{500}{2}$ = 225 د.ل	عالي جدا	$(4.5)(0.2)\frac{266}{2}$ = 299.70 د.ل	عالي جدا	$(3.5)(0.2)\frac{1000}{2}$ = 225 د.ل
تكلفة لإعداد الطلبية $\frac{Q}{D}C_2$	$\frac{10000(20)}{500}$ = 400 د.ل		$\frac{10000(20)}{666}$ = 300 د.ل		$\frac{10000(20)}{1000}$ = 200 د.ل
مجموع تكلفة المخزون + تكلفة إعداد الطلبية	= 625 د.ل		= 600 د.ل		= 590 د.ل
تكلفة الوحدة المخزنة	(4.5) 10000 = 45625 د.ل		(4.5) 10000 = 45599 د.ل		(3.5) 10000 = 39590 د.ل

بالنظر إلى الجدول (11-1) الذي يوضح العلاقة بين التكلفة وكمية الطلبية الثابتة. فمثلا الكمية التي تظهر في الطلبية الأولى تخصص أن شراء 633 وحدة لكل منها 5 د.ل، في حين أن إذا خصصنا شراء 633 وحدة بسعر 4.5 د.ل. تختلف أو تزيد عن سعر 5 التي هو 225 د.ل. وتطابق الكمية الثالثة 666 د.ل. ويمكن تطلب 716 بسعر 3.9 د.ل. وهذا سعر غير اقتصادي ولكن يمكن استعمال هذا السعر في الكمية التي تزيد عن 1000 وحدة.

يعني هذا أن كل كمية اقتصادية أو مناسبة تكفي مناسبة لسعر محدد في مدى محدد وليس دائما كما يعتقد البعض أحيانا.

ويوضح أكثر أن السعر 5 صالح بأن يكون اقتصادي في الكمية المرافق له حسب الشكل (11-8).

وبالتالي عندما يختلف السعر عند كميات مختلفة فبتالي ليسنا مضطرين إلى حل المسألة عند كل مسعر، بل يجب حل المسألة عند أكبر طلبية وأقل سعر ثم نقارن كل كمية إذا تقع تحت المواصفات أم لا.

11.13 نموذج الطلبية الاقتصادية عندما تكون الفترة الزمنية ثابتة:

(Fixed-time period model)

يقصد بهذا النوع من الأنماط التي تعتمد فيه الطلبية على نظام الفترة الزمنية الثابتة. ومن المهم في هذا النوع من الأنظمة أن يتوفر المخزون الاحتياطي بكمية عالية بالنسبة لنظام الطلبية الثابتة التي نوقش مسبقا.

وأن توفر المخزون الاحتياطي (Safety stock) يحمي النظام من حصول ظاهرة فقدان المخزون عند الطلبية.

فإن نظام الفترة الزمنية الثابتة تحت ظروف الاحتمالات مع شرط توفر المخزون

الاحتياطي لتحقيق مستوى الخدمات المطلوبة في توفير المواد المخزنة. الشكل (10-11) يوضح وصف نظام الفترة الزمنية الثابتة. مع دائرة المراجعة الزمنية (T) وزمن إعداد الطلبية الثابتة (L) بالإضافة إلى الطلبية الزمنية ذات التوزيع العشوائي بمتوسط $\bar{d}$ وأن الكمية المطلوبة q تكون:

بمتوسط $\bar{d}$ وأن الكمية المطلوبة q تكون:

$$q = \bar{d}\,(T + L) + Z\,\sigma_{T+L} - I$$

حيث:

$\bar{d}\,(T + L)$ = متوسط الطلبية خلال الفترة الزمنية الثابتة.

$Z\,\sigma_{T+L}$ = احتياطي الأمان.

I = مستوى كمية المخزون المتوفر في أي وقت + ما تم طلبه.

q = الكمية المطلوبة.

T = طول الفترة الزمنية ما بين المراجعة لكمية المخزون.

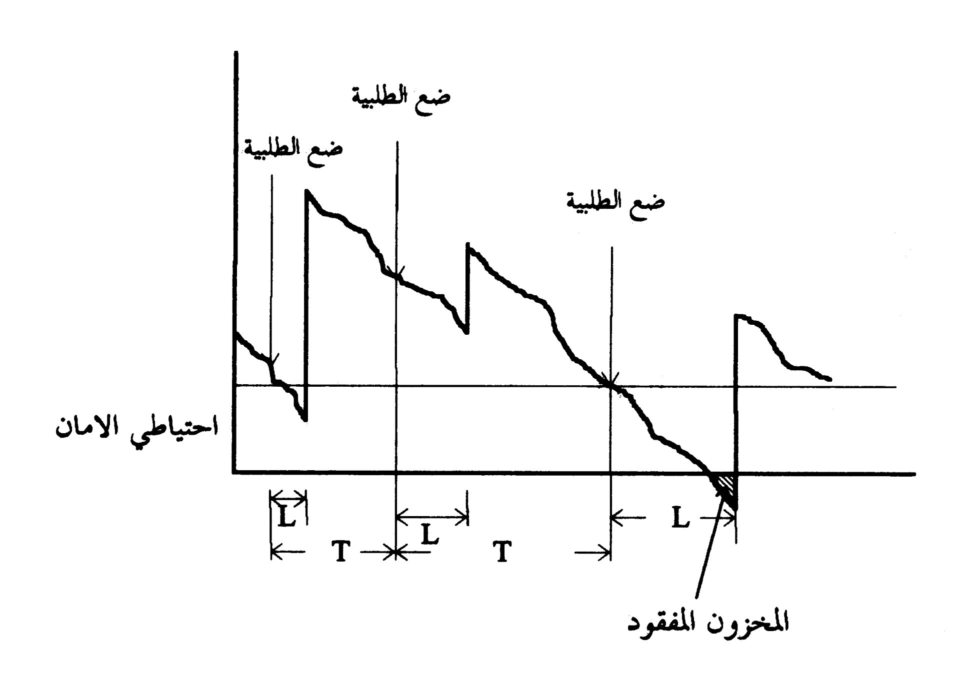
L = زمن إعداد الطلبية حتى وصولها.

$\bar{d}$ = متوسط الطلبية اليومية خلال الفترة T + L.

z = عدد الانحراف المعياري خلال فترة محددة.

σ_{T+L} = الانحراف المعياري خلال فترة مراجعة الطلبية + إعداد الطلبية.

في النمط $(\bar{d})$ يمكن أن تحسب بواسطة إحدى طرق التنبؤ أو تحسب كمتوسط الطلبية اليومية. بالإضافة إلى أن فترة الاستهلاك (T) وفترة إعداد الطبلية (L) يمكن أن تتغير أثناء السنة بسبب العطلات. وتقل بعض خطوط الإنتاج وعدد أيام العمل خلال الأسبوع بسبب الظروف الجوية.



$$E(z)=\frac{D_T(I-P)}{E_{T+L}}$$

حيث:

E (Z) = عدد الوحدات المفقودة تخضع للمنحنى الطبيعي حيث لها متوسط = 0 $I=\sigma$.

P = مستوى الخدمات المطلوبة.

D_r = الطلبية خلال فترة الاستهلاك T.

$\sigma_{++\checkmark}$ = الانحراف المعياري خلال فترة توفر الطلبية وزن إعدادها.

مثال (9-11):

إذا علمت بأن الطلبية اليوم من فتح ما تساوي 10 وحدات، وأن الانحراف المعياري يساوي 3 وحدات. وأن الانحراف المعياري يساوي 3 وحدات. وأن فترة متابعة

الاستهلاك 30 يوما وأن زمن إعداد الطلبية 14 يوما. فإذا قررت الإدارة أن سياسة توفير الطلبية من المخزون باحتمال 98%، وإذا كان في بداية الفترة يوجد 42 وحدة في المخزن (I) . أحسب عدد الوحدات التي يجب توريدها لتحقيق الطلبية.

الحل:

$$E(z) = \frac{D_T(I-P)}{\sigma_{T+L}}$$

$$\sigma_{T+L} = \sum_{I=1}^{T+L} \sigma_{d_I^2}$$

ويمثل σ_{T+L} الانحراف المعياري خلال الفترة الزمنية (L + T) وبما أن طلبية كل يوم لا تعتمد على طلبية أي يوم.

$$\sigma_{T+L} = \sqrt{(30+14(3)^2} = 19.90$$

وفي هذه الحالة فإن الطلبية المطلوبة (D_r) خلال الفترة T الموضحة في الشكل (9-11) تكون $\bar{d}T$

$$E(z) = \frac{\bar{d}T(1-P)}{\sigma_{T+L}}$$

$$EL = \frac{10(30)(I-0.98)}{19.90} = 0.30151$$

من الجدول (2-11):

E (z) = 0.30151

وباستخدام طريقة المتوسط الحسابي (Interpolation)

z = 0.21

∴ الكمية المطلوبة توريدها q

$$q = \bar{d}\,(T+L)\,z\,\sigma_{T+L} - I$$
$$q = 10(30+14) + 0.2(19.90) - 42$$
$$q = 402 \quad \text{وحدة}$$

ولتحقيق أن الطلبية المطلوبة تكون متوفرة بنسبة 98% فإن الكمية الموردة يجب أن لا تقل عن 402 وحدة.

11.14 دراسة حالة (مخزن الإطارات بالشركة العامة للشاحنات)

تبلغ المساحة المسقوفة للمخزون حوالي 1200م^2 وارتفاع 8 أمتار ويشتغل في هذا المخزن أربعة إداريين وخمسة فنيين وينقسم المخزن إلى قسمين قسم لتخزين وتنظيم وترتيب الإطارات إلى حين الحاجة إليها في التجهيز والقسم الآخر يقوم بتجهيز وتركيب الإطارات ووضعها في أرفف إلى حين نقلها إلى خطوط الإنتاج.

وتنقسم الإطارات إلى نوعين أحدهما صغير ذو رقم 16/650 ويستعمل للحافلات الصغيرة (ديلي) والشاحنات الصغيرة (ديلي) والأخرى كبيرة ذو رقم 12/20 وتستعمل للشاحنات الكبيرة والحافلات السياحية.

ويتكون الإطار من ثلاثة قطع وهي الإطار الخارجي، والداخلي، والفلاب. حيث يتم تجميع هذه القطع الثلاث مع الإطار المعدني.

أما محتويات هذا المخزن فهي تتمثل في الآتي:

- عدد واحد رافعة شوكية.
- عدد ثلاثة آلات للفك والتركيب.
- عدد اثنان ضاغط هواء.
- مجموعة من الأرفف بتنظيم المخزون.
- عربات نقل يدوية.

11.14.1 حساب تكاليف التخزين للإطارات:

في حساب تكاليف التخزين تم تطبيق نموذج الشراء بدون عجز وذلك لأنه أكثر ملائمة من النماذج الرياضية الأخرى حيث أن المصنع يقوم بتوريد الإطارات من الخارج ولهذا لا يمكن استخدام النماذج الخاصة بالتصنيع.

أما بالنسبة للنماذج التي تسمح بحدوث عجز فهي تناقش حالة توقف الإنتاج في فترات مختلفة، وهذا لا ينطبق على الحالة التي تحت الدراسة، كما أن البيانات التي يحتاجها هذا النموذج لا يمكن الحصول عليها، ولهاذ تم اختيار نموذج الشراء بدون عجز والذي يعتبر من النماذج المحددة ويفترض هذا النموذج ما يلي:

1- ثبات معدل الإنتاج.
2- يتحقق الشراء بسرعة وعلى الفور.
3- عدم وجود خزين احتياطي.
4- لا يسمح بنفاذ المخزون نهائيا من المخزن.

وفيما يلي الخطوات المتبعة لحساب تكاليف التخزين داخل المصنع:

1- تكاليف أعداد الطلبية.
2- تكاليف الاحتفاظ بالمخزون.
3- تكاليف شراء المخزون.

أولا: حساب تكاليف إعداد الطلبيات:

يمكن إيجاد تكلفة إعداد الطلبيات بضرب تكلفة الطلبية الواحدة (S) في كمية الطلبية السنوية (D) مقسوم على كمية الطلبية الواحدة (Q) ومن هنا سوف نتطرق إلى حساب كمية الطلبية السنوية للإطارات.

من خلال البيانات المتحصل عليها من سجلات إدارة المشتريات بالمصنع أمكن حساب كمية الطلبية السنوية للإطارات وذلك حسب ما هو مبين في الجدول التالي:

جدول (11-2)

السنة	إطار 16/650	إطار 12/20
1991	10200	3100
1992	9800	3795
1993	10150	3400
1994	10250	3250
1995	9600	4000

ويأخذ المتوسط الحسابي للكميات السابقة كل على حدة نحصل على الآتي:

كمية الطلبية السنوي للإطار 16/650 = 10000 إطار

كمية الطلبية السنوي للإطار 12/20 = ٣٥٠٩ إطار

كمية الطلبية السنوي للإطار (D) = 10000 + 3509 = 13509 إطار

وبهذا يمكن حساب تكاليف الطلبية الواحدة (S) والتي ترتبط بكل من الآتي:

- تكلفة الهواتف والبريد والفاكس = 60.6 د.ل. طلبية.
- أجور العاملين على إعداد الطلبية = 2750 د.ل./ طلبية
- تكاليف النقل والتفريغ للطلبية الواحدة = 1500 د.ل./ طلبية
- مصاريف أخرى وتشمل القرطاسية والدمغة وغيرها = 650 د.ل./ طلبية

وعلى هذا الأساس يكون إجمالي تكلفة الطلبية الواحدة (S) كما يلي:

S = 2750 + 1500 + 560

S = 4870.6 د.ل/ طلبية

تكلفة إعداد الطلبية = 480.6 x (D/Q)

ثانيا: حساب تكلفة الاحتفاظ بالمخزون:

يمكن حساب تكلفة الاحتفاظ بالمخزون بضرب متوسط كمية الطلبية الواحدة في تكلفة التخزين السنوي للوحدة الواحدة في المخزن، وحيث أن كمية الطلبية قيمة مجهولة فإننا سوف نقوم بحساب تكلفة التخزين السنوي للوحدة الواحدة والتي يمكن حسابها كما يلي:

أ - حساب الإهلاك للأصول الثابتة:

يحتوي المخزون على مجوعة من الآلات والمعدات والأجهزة والتي تستهلك مع مرور الزمن وتقل قيمتها إلى أن تصبح بعد عدة سنوات خردة، ولهذا يتم حساب قيمة الإهلاك السنوي للآلات وإضافته على تكلفة الاحتفاظ بالمخزون. وهناك عدة طرق لحساب الإهلاك منها:

1- طريقة الخط المستقيم.
2- طريقة النسب الثابتة.
2- طريقة مجموع السنين.

وقد تم استخدام طريقة النسب الثابتة لحساب الإهلاك لكل الآلات والمباني والمعدات وقدرات نسبة الإهلاك من قبل المصنع للآلات 20% من قيمتها نسبة الإهلاك للمباني 5% من قيمتها.

وبهذا تكون قيمة الإهلاك لكل آلة كما يلي:

1- آلة فك وتركيب الإطارات	1500 د.ل. سنويا
2- رافعة شوكية	1236 د.ل. سنويا
3- جهاز ضخ الهواء	135.848 د.ل. سنويا
4- جهاز تعديل الإطارات	395.8 د.ل. سنويا
5- عربة نقل يدوية	100 د.ل. سنويا

-6	رافعة لنقل الإطارات	500 د.ل. سنويا
-7	مبنى مخزن الإطارات	2125 د.ل. سنويا
-8	مبني مخزن الإطارات	7081.648 د.ل. سنويا

ب - حساب أجور العاملين في المخزن:

كما ذكر سابقا فإنه يشتغل في هذا المخزن تسعة عاملين ومتوسط الأجور حول 250 د.ل. في الشهر وعلى هذا فإن تكلفة الأجور تساوي:

= 12 x 9 x 250 = 27000 د.ل

ج - تكلفة الكهرباء:

حيث أن طبيعة المادة المخزونة لا تحتاج إلى عمليات تبريد أو تدفئة للمخزن، ولذا فإن كمية الكهرباء المستهلكة تصرف في الإضاءة وتشغيل الآلات والمعدات الكهربائية فقط.

وقد بلغت تكاليف الكهرباء سنويا 850 د.ل. سنويا,

د - حساب تكاليف التلف:

طبيعة المادة المخزونة لا تتأثر بالعوامل الجوية، ولكن قد يحدث في بعض الأحيان تلف للإطارات بسبب سوء المناولة أو عند التركيب الخاطئ للإطار. وقد حددت نسبة التلف في الإطارات 0.5%، ومن هنا يمكن حساب التلف كما يلي:

كمية التلف في إطارات 12/20 = 3509 x 0.005 = 17 إطار سنويا

كمية التلف في إطارات 16/650 = 10000 x 0.005 = 50 إطار سنويا

وحيث أن:

سعر بيع إطار 12/20 = 268 د.ل

سعر بيع إطار 16/650 = 57 د.ل

فإن تكلفة التلف في إطار 12/20 = 17 x 268 = 45556 د.ل. سنويا

وتكلفـة التلـف في إطـار 16/650 = 50 x 57 = 2850 د.ل. سنويا

هـ - مصاريف أخرى وتتكون من الآتي:

1- التأمين على المخزون = 12000 د.ل. سنويا

2- القرطاسية والأدوات المكتبية = 150 د.ل. سنويا

3- الأمن والسلامة = 1000 د.ل. سنويا

4- فوائد رأس المال = 10768 د.ل. سنويا

إجمالي تكاليف الاحتفاظ بالمخزون لمدة سنة كاملة = 66255.648 د.ل. سنويا

حيث أن كمية الاحتياج السنوي للإطارات 13509 إطار

فإن تكلفة التخزين السنوي للوحدة الواحدة:

(H) 66255.648/13509 = 4.9 د.ل/ إطار.

تكلفة الاحتفاظ بالمخزون = 4.9 x Q/2

ثالثا: حساب تكلفة شراء بالمخزون:

إن كمية الطلب السنوي للإنتاج من الإطارات نوع 16/650 = 1000 إطار، بسعر شراء = 36 د.ل/ للإطار (من الخارج).

وكمية الطلب السنوي للإنتاج من الإطارات نوع 12/20 = 3509 إطار،

بسعر شراء = 102 د.ل/ للإطار (من الخارج).

التكلفة الكلية لشراء إطارات نوع 16/650 (من الخارج)

= 10000 x 36 = 360000

إجمالي تكلفة الشراء للإطارات (من الخارج)

360000 + 357918 = 7179918 د.ل

وهناك بعض المصاريف الأساسية الأخرى التي تدخل ضمن حساب تكاليف الشراء الكلية وهي:

مصاريف الموانئ	%1.3
مصاريف ملاحية	%2.5
مصاريف جمركية	%30
دمغة ومصاريف بلدية ورصيف	%6.06
مصاريف مصرفية	%2
نهر صناعي	%15
تأمين بحري	%0.5
النسبة الإجمالية	%57.36

التكاليف الإضافية = 411797 = 0.5736 x 717918

التكاليف الكلية لشراء الإطارات = 1129715 = 411797 + 717918

11.14.2 إيجاد الكمية الاقتصادية (Q) للطلبية حسابيا:

يمكن إيجاد الكمية الاقتصادية للطلبية باستعمال المعادلة (3-2) الموضحة في الفصل الثالث:

$$Q = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2 \times 13509 \times 4870.6}{4.9}}$$

$$Q = \sqrt{26855892}$$

$$Q = 5182 \quad \text{إطار}$$

ومن المعادلة (3-3) يمكن إيجاد الفترة الزمنية بين طلبيتين:

$$t = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 4870.6}{13509 \times 4.9}}$$

$$Q = 0.35$$

الفترة الزمنية بين طلبيتين = 0.35 x 365 = 127.75 يوم

ومن المعادلة يمكن إيجاد التكاليف الكلية للتخزين

$$TC = \sqrt{2HDS}$$

$$Q = \sqrt{2 \times 4.9 \times 13509 \times 4870.6}$$

$$Q = 25393 \quad L.D.$$

11.14.3 إيجاد الكمية الاقتصادية (Q) للطلبية بيانيا:

أولا: تكاليف إعداد الطلبيات:

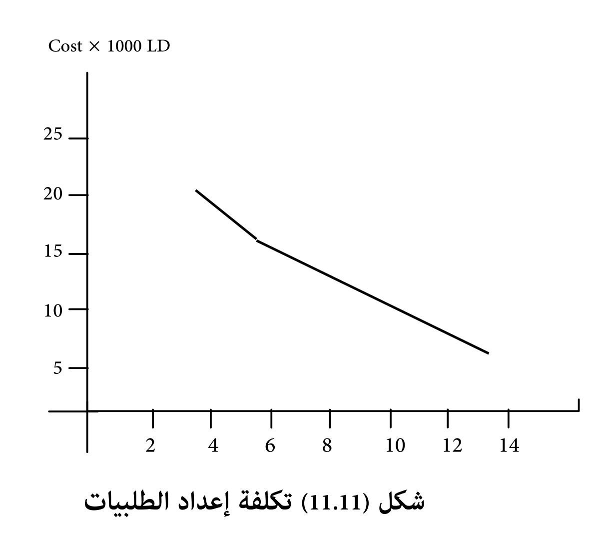
يتم التعويض بقيم مختلفة لـ (Q) في المعادلة الخاصة بتكاليف إعداد الطلبيات وتدوين النقاط المتحصل عليها في جدول كما يلي:

Q / 4870.6 x 13506 = تكلفة إعداد الطلبية

جدول (3-11) تكلفة إعداد الطلبيات

عدد الطلبيات	كمية الطلبية (إطار)	تكلفة إعداد الطلبيات (د.ل)
1	13509	4870.9
2	6754	9741.2
3	5182	12696
4	3377	19482.4

ومن القيمة في الجدول أعلاه يمكن الحصول على الشكل:



شكل (11.11) تكلفة إعداد الطلبيات

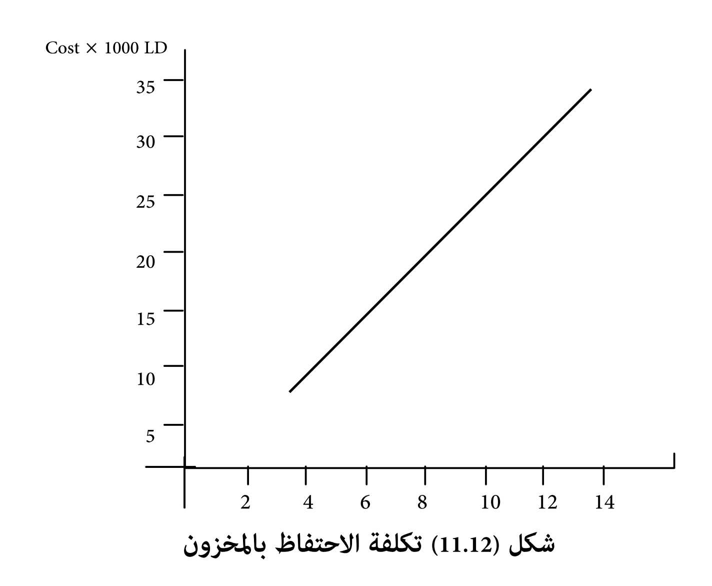
ثانيا: تكاليف الاحتفاظ بالمخزون:

يتم التعويض بقيم مختلفة لـ (Q) في المعادلة الخاصة بتكاليف الاحتفاظ بالمخزون وتدوين النقاط المتحصل عليها في جدول كما يلي:

جدول (4-11) تكلفة الاحتفاظ بالمخزون

عدد الطلبيات	كمية الطلبية (إطار)	تكلفة الاحتفاظ بالمخزون (د.ل)
1	13509	33097
2	6754	16547
3	5182	12696
4	3377	8273

ومن القيمة في الجدول أعلاه يمكن الحصول على الشكل (12-11):



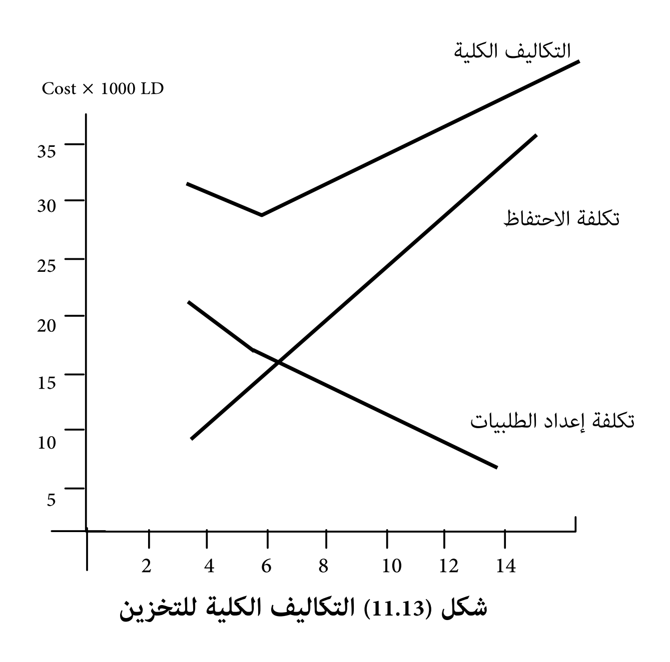
شكل (11.12) تكلفة الاحتفاظ بالمخزون

من الجدول (4-11) نحصل على التكاليف الكلية للتخزين:

جدول (5-11) التكاليف الكلية للتخزين

عدد الطلبيات	كمية الطلبية (إطار)	تكلفة الطلبيات (د.ل)	تكلفة الاحتفاظ بالمخزون (د.ل)	التكاليف الكلية للتخزين (د.ل)
1	13509	4870.6	33097	37967
2	6754	97741.2	16547	26288
3	5182	12696	12969	25392
4	3377	19482.4	8273	27756

ومن القيمة في الجدول أعلاه يمكن الحصول على الشكل (13-11):



شكل (11.13) التكاليف الكلية للتخزين

ومن خلال دراسة عناصر تكاليف التخزين الكلية والتي تتكون من كلفة الاحتفاظ بالمخزون وكلفة إعداد الطلبية نلاحظ أن هاتين الكلفتين متناسبتين عكسيا بعضهما مع البعض، فزيادة حجم الطلبية تؤدي إلى زيادة كلفة الاحتفاظ وفي نفس الوقت انخفاض في كلف إعداد الطلبية والعكس صحيح.

ومن الشكل (11.13) يمكن إيجاد الكمية الاقتصادية للطلبية (Q) والتكاليف الكلية المثلى لها كانت كما يلي:

الكمية الاقتصادية (Q) = 5182 إطار

التكلفة الكلية المناظرة للكمية الاقتصادية =

= 25392 + 1129715.76 = 1155107.76 د.ل

11.14.4 تكاليف تخزين الإطارات خلال سنة 1995 افرنجي:

طبقا للمعلومات المتحصل عليها من سجلات إدارة المشتريات للمصنع

عدد الطلبيات السنوية	=	5 طلبيات.
كمية الطلبية الواحدة	=	2702 إطار.
تكلفة الاحتفاظ بالمخزون	=	6620 د.ل. سنويا
تكلفة إعداد الطلبية	=	24353 د.ل. سنويا
التكلفة الكلية	=	1129715 + 30973
	=	1160688د.ل. سنويا

11.14.5 برنامج بالحاسب الآلي لحساب الكمية الاقتصادية:

```
C      THIS PROGRAM IS USED TO CALCULATE THE PRODUCTION COSTS
C      TO CACULATE THE COST OF PREPARING ONE ORDER
C      D: THE ANNUAL PRODUCTION QUANTITY
C      SALR: THE COST OF SALARIES
C      POST : THE COST OF POST
C      TRANS : THE COST OF TRANSPORT C OTHER: ANOTHER SPENTS
C      S: THE TOTAL COST OF PREPARING ONE ORDER

WRITE (*, *)'ENTER ANNUAL PRODUCTION QUANTITY (D)' READ (*,*)D
WRITE (*,*)'ENTER THE COSTS OF ..... .'
WRITE (*,*)SALARIES ='
READ (*, *)SALR
WRITE (*,*)' .. POST ='
READ (*, *)POST
WRITE (*,*)' .. TRANSPORT =' READ (*, *)TRANS
WRITE (*,*)' .. ANOTHER SPENTS=' READ (*, *)OTHER
S = SALR + POST + TRANS + OTHER
C      ********************************************
C      TO CALCULATE THE STORAGE COST OF ONE UNIT C OBVON : THE COST OF OBIVIONS
C      ELECTR : THE ELECTRICITY COST
C      WASTE : THE COST OF WASTES
C      INSUR : THE INSURANCE COST
C      SALAR : THE SALARIES
C      SAFE : THE SAFETY COST
C      INTRE: THE INTERESTS COST
C      OTHERS: ANOTHERSPENTS
C      H: THE STORAGE COST OF ONE UNIT
C      Q : THE RIGHT QUANTITY

WRITE (*,*)'ENTER THE STORAGE COSTS AND SPENTS ... .'
WRITE (*,*)'OBIVIONS......'
READ (*,*)OBVON
WRITE (*,*)'ELECTRICITY COST .... .'
```

```
READ (*,*)ELECTR
WRITE (*,*)'WASTES .... .'
READ (*,*)WASTES
WRITE (*,*)'INSURANCE COSTS .... .'
READ (*,*)INSUR
WRITE (*,*)'SALARIES .... .'
READ (*,*)SALAR
WRITE (*,*)'SAFETY ..... .'
READ (*,*)SAFE
WRITE (*,*)'INTEREST .... .'
READ (*,*)INTER
WRITE (*,*)'ANOTHER SPENTS .... .'
READ (*,*)OTHERS
H=OBYON+ELECTR+WASTE+INSUR+SALAR+SAFE+INTER+OTHERS
H=HID
WRITE (*,*)'H = ' ,H
C
Q = SQRT (2.0*D*SIH)
WRITE (.,.),Q = ',Q
C       ******************************************
C       TO CALCULATE THE ORDER PREPARING COST
C       ORDPRP : THE ORDER PREPARING COST

ORDPRP = S*D/Q
WRITE (*,I)ORDPRP
C       TO CALCULATE THE STORAGE COST:
C       STRCOS : THE STORAGE COST
STRCOS = H*Q/2.0
WRITE (*,2)STRCOS

C       THE TOTAL COST
C       TC : THE TOTAL COST TC = ORDPRP + STRCOS
WRITE (*,3)TC

STOP
1       FORMAT (5X,'ORDERPREPARING COST =',FI5.5)
2       FORMAT(5X,'STORAGE COST =',FI5.5)
3       FORMAT(5X,THE TOTAL COST =',FI5.5)
END
```

11.15 مسائل:

1- ضع علامة (✓) أو (✗) على العبارات التالية:

1- تكلفة أعداد الطلبية تعتمد على حجم الطبية الواحدة ( )

2- في نموذج نظام التخزين تكلفة فقدان الطلبية من السهل تقديره. ( )

3- لا يمكن أن يحتوي نموذج نظام التخزين على تكلفة حفظ الطلبية ( )

4- في نموذج نظام التخزين الفترة الثابتة يعاد إضافة الطلبية في فترة زمنية متساوية ( )

5- الزيادة في تكلفة أعداد الطلبية تقلل من كمية الطلبية المناسبة ( )

6- عندما تزيد تكلفة إعداد الطلبية تزيد كمية الطلبية المناسبة ( )

7- إذا يسمح في نموذج نظام التخزين بفقدان الطلبية فإن تكلفة فقدان المخزون مهمة في استكمال التكلفة الإجمالية للتخزين ( )

2- شركة ما طلبيتها السنوية 1500 وحدة، تكلفة إعداد الطلبية الواحدة 20 د.ل، ولا يسمح بفقدان المخزون لهذه الشركة. تكلفة حفظ المخزون للوحدة في الشهر 2 د.ل.

أ - احسب كمية الطلبية المناسبة.

ب- احسب التكلفة الإجمالية للمخزون.

3- شركة إنتاجية ترغب في تحقيق الطلبية الأسبوعية بمتوسط قدرة 2000 وحدة. تكلفة إعداد الطلبية 15 د.ل. وتكلفة حفظ الوحدة المنتجة لمدة سنة 0.195 د.ل. علما بأن السنة تساوي 364 فرضا.

أحسب:

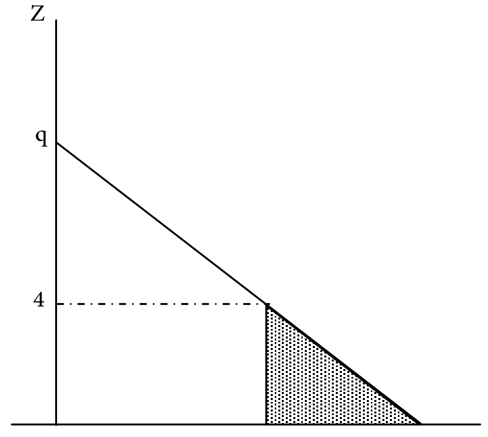
أ - كمية الطلبية عند أقل تكلفة ممكنة.

ب- عدد الطلبيات في السنة.

ج- طول الفترة الزمنية في الدورة المخزنية الواحدة.

د- تكلفة التخزين السنوية.

4- شركة وطنية طلبيتها السنوية D. وكل طلبية يكلف إعدادها مبلغ قدرة k. وتكلفة حفظ المخزون للوحدة في السنة H كل ما زاد حجم المخزون عن 4 وحدات. وكل ما زاد حجم المخزون عن 4 أصبحت تكلفة المخزون F. كما هو موضح بالشكل.



المطلوب: أثبت أن:

(1) تكلفة حفظ المخزون في الدورة التخزينية الواحدة.

$$H = \left[\frac{q^2 - 16}{2D}\right] + F\left(\frac{8}{2}\right)$$

(2) تكلفة التخزين الإجمالية في الدورة التخزينية الواحدة.

$$C = \frac{DK - 8(H - f)}{q} + \frac{Hq}{2}$$

(3) الطلبية المناسبة = q*

$$q^* = \sqrt{\frac{2DK - 16(H - f)}{H}}$$

5- بئر نفط يضخ سنويا 20.000 برميل / ويستخدم من هذه الكمية 5000 برميل شهريا. وتكلفة إعداد الطلبية 30 د.ل، وتكلفة تخزين البرميل الواحد 0.45 د.ل. والزمن الذي يبدأ في إعداد الطلبية قبل نفاذها 4 أسابيع أحسب:

1- كمية الطلبية المناسبة.
2- مستوى التخزين الأعظم.
3- كمية إعادة الطلبية.
4- التكلفة الإجمالية للتخزين

6- شركة إنتاجية يطلب منها توفير 40,000 منتج. وتكلفة الطلبية الواحدة تكلف 100 د.ل، وتكلفة حفظ المخزون تساوي 10% من تكلفة حفظ التخزين. ويمكن بيع الوحدة المنتجة وفقا للخطة الكمية التالية:

عدد الوحدات	السعر
5000-0	20 د.ل
2,000 - 5,000	19 د.ل
25,000 وأكثر	18 د.ل

المطلوب:

أ - احسب كمية الطلبية المناسبة EOQ.

ب- أوجد قيمة التكلفة الإجمالية لطلب الكمية المناسبة.

7- شركة إنتاجية يطلب منها توفير 500.000 وحدة إنتاجية من أحد منتوجاتها. وتكلفة الطلبية الواحدة 100 د.ل وتكلفة حفظ المخزون 10% من تكلفة التخزين. ويمكن تباع الوحدات المنتجة وفقا للخطة التالية:

السعر	عدد الوحدات
20 د.ل	6000-0
19 د.ل	12.000 - 6000
20.02 د.ل	30.000-12001
20.00 د.ل	30.001 وأكثر

المطلوب:

أ - احسب كمية الطلبية المناسبة EOQ.

ب- احسب التكلفة الإجمالية عند الكمية المناسبة.

8- إذا كانت طلبية لمنتج ما تساوي 100 وحدة سنويا. وإن تكلفة الطلبية الواحدة تساوي 10 د.ل وأن تكلفة حفظ المخزون 2 د.ل للوحدة أحسب:

أ - كمية الطلبية المناسبة (التي تحقق أقل تكلفة إجمالية للتخزين).

ب- التكلفة الإجمالية للتخزين عند طلب الطلبية المناسبة.

9- ما هو الهدف الأساسي من نظام التخزين؟

10- أشرح معنى المفردات التالية:

أ - المخزون الاحتياطي.

ب- نظام المخزون تحت الاستهلاك

11- ناقش التكاليف التي تؤثر على حجم المخزون.

12- ما هي الأسئلة المطلوب الإجابة عليها من نمط نظام التخزين.

13- أشرح معنى المفردات التالية:

أ - إحضار المواد الغذائية اليومية لمنزلك.

ب- الحصول على الجريدة اليومية.

ج - شراء الوقود للمركبة الآلية.

وما هي المسألة التي تحتاج إلى احتياطي تخزين أعلى.

14- ما هي السياسة التي يجب إتباعها لتحسين نظام التخزين في إحدى الأسواق العامة. ناقش.

15- كيف يتم توقيع الطلبيات التي بناء عليها يحدد طلب الكمية المناسبة.

الفصل الثاني عشر

نظرية نظام خطوط الانتظار

يتطرق هذا الفصل إلى موضوعات أساسية مثل ماهية نظرية خطوط الانتظار، ومشكلة نظام خطوط الانتظار، ومواصفات ومكونات هذه الخطوط. كما يتضمن الفصل تطبيقات في الأنماط الرياضية لخطوط الانتظار، بالإضافة إلى مجموعة من المسائل والتمارين التي تفيد في عملية استيعاب القارئ لهذه التقنيات.

الفصل الثاني عشر



نظرية نظام خطوط الانتظار

Waiting line theory

12.1 مقدمة:

ظهرت نظرية خطوط الانتظار في 1900 ميلادي بواسطة عالم رياضيات يدعى (A. K. Erlang)، والذي بدأ بدراسة مشكلة تسلسل وتداخل خطوط الهاتف، وبعدها في الحرب العالمية الثانية بدأت تطبيقات عديدة في مجال الصناعة الإنتاجية والخدمية وأصبحت أحدى الأدوات المهمة في العمليات الإدارية.

سوف نتناول في هذا الفصل معلومات مفيدة عن استخدام نظرية نظام الطوابير والقوانين العاملة بها مع الاعتماد على وجود خلفية متوسطة للقارئ على علم الإحصاء لغرض متابعة المعلومات المطلوبة ومعرفة أصولها المبدئية.

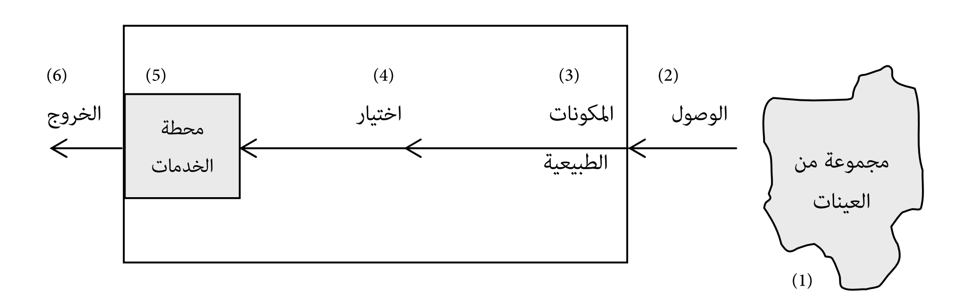
12.2 مشكلة نظام خطوط الانتظار:

تظهر هذه المشكلة عندما يوجد نظام محطة تقديم خدمات متشابه مثال محطات الوقود - حانوت الحلاقة - صالات عرض الأشرطة - طرف في مصرف - أمين خزينة في مؤسسة - تقديم خدمات الهواتف الوطنية والدولية - ... الخ، وعندما يوجد هذا النوع من المحطات فإن المشكلة هي تقديم الخدمات الضرورية في الزمن المناسب وبأقل تكلفة ممكنة من الآلات والمعدات والطاقة البشرية المساهمة في تقديم هذه الخدمات وبأكثر فائدة ممكنة - بالإضافة إلى تفادي فقدان الزبائن وعدم سوء تخطيط الإمكانات بأن تصبح معطلة عندما تكون متوفرة أكثر من اللازم.

فمثال خط تسجيل الطلاب في بداية العام الجامعي في كلية جامعية ما - من المطلوب أن يتم تسجيل الطلاب في وقت محدد تراه الجامعة وذلك بتوفير مكاتب التسجيل أكثر من العدد المتوفر في حالة العمل العادي - وهذا يترتب عليه زيادة تكلفة في ميزانية الكلية وبالتالي يجب أن تكون دراسة هذه الحالة كافية لحل مشكلة التسجيل في الوقت المناسب وبما لا يتعارض مع تحميل الجمعة ميزانية فوق الميزانية المخطط لها.

12.3 مواصفات خطوط الانتظار:

الشكل رقم (12.1) يوضح مكونات ومواصفات خط الانتظار وبالتفصيل في الأشكال التي تتبع هذا الشكل:

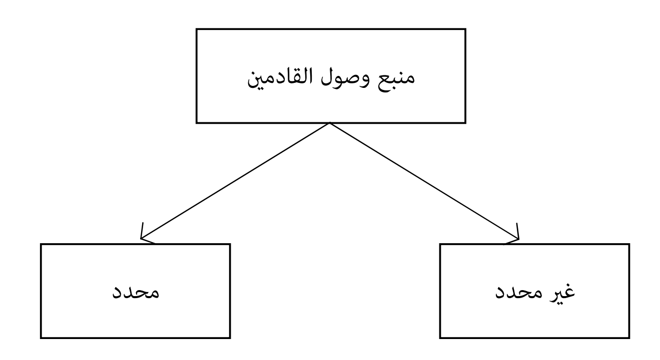


شكل : (12.1) مكونات ومواصفات خط الانتظار

12.3.1 مصدر العينات (Population source)

يقصد بمصدر العينات بمصدر الواصلين في أي نظام لتلقي الخدمات في محطة الخدمات. ومن الممكن أن يكون المصدر ذو أعداد محددة وأحيانا تكون غير محددة (Finite of infinite). فمثلا عدد الآلات في مصنع ما والتي تنتظر الصيانة أو فريق فهو عدد محدود (Finite).

أما عدد الواصلين إلى حانوت حلاقة يكون غير محدد من الزبائن. عدد السيارات القادمة إلى مدينة طرابلس غير محدد، والأمثلة كثيرة في الحياة، ويمكن تمثيل نوع القادمين في شكل 12.2.



شكل : (12.2) تمثيل نوع القادمين

12.3.2 مواصفات الواصلين (Arrival characteristics):

12.3.3 نمط الواصلين (Pattern Arrival):

يمكن أن تكون طريقة الواصلين بطريقة يمكن التحكم فيها ومعرفة سرعة وصولها وكميات الواصلين إلى مراكز الخدمة أو الخدمات. فمثلا القادمين إلى حانوت الحلاقة يقل عددهم يوم الجمعة وبطبيعة الحال يزداد العدد في أيام الأسبوع الأخرى. ربما يزداد عدد الزبائن في الموزعات الفردية في أيام تخفيض السلع عنها في الأيام العادية أو يزداد في مناسبات الأعياد الدينية مثال عيد الفطر وعيد الأضحى المباركين عنها في الأيام العادية. خطوط الطيران والخطوط الجوية تزدحم في مواسم العطلة الصيفية عنها في باقي أشهر السنة. وفي مثال هذه الحالات يمكن التحكم في نموذج عدد الواصلين وتوفير الخدمات اللازمة لهم.

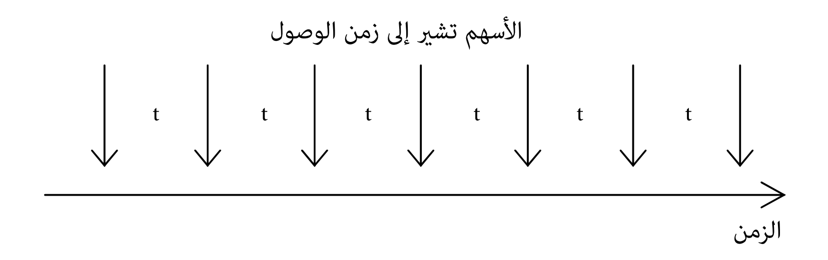
ولا يمكن التحكم أحيانا في عدد القادمين إلى مراكز الخدمة مثال غرف الطوارئ في المستشفيات.

2- **حجم العينات الواصلة إلى مراكز الخدمات (Size of arrival unit):**

يمكن يكون الواصلين على هيئة مفردة عندما يكون مركز الخدمة واحد والتي يمثل أقل نموذج لأنظمة الانتظار. ومن الممكن أن يكون حجم العينة يصل على أفواج أو دفعات لتلقي الخدمة على هيئة عدة مراكز خدمات في آن واحد، مثال مشاهد بقلم في صالة فرح عامة أو عشاء إلى خمس أشخاص على طاولة واحدة.... الخ.

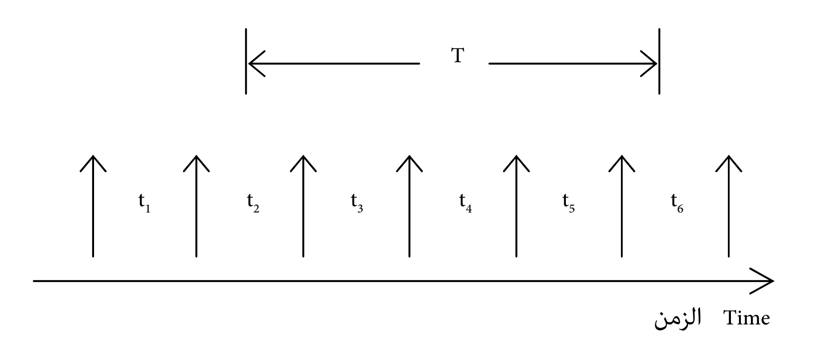
3- **توزيع الواصلين (Distribution of arrivals)**

يمكن أن يكون طريقة توزيع الواصلين على نظام ثابت وذلك بحجم ثابت في زمن ثابت أي فترات متساوية كما هو موضح بالشكل (12.3).



شكل : (12.3) يوضح وصول العينات بصورة ثابتة وفي زمن ثابت

ويمكن النظر في توزيع الواصلين أما بالنسبة إلى فترات الزمن بين الواصلين أو باحتمال وصول أي حالة وحالة أخرى أو بواسطة زمن معروف (T) ونعمل على كيفية حساب كم عدد الواصلين خلال فترة زمنية محددة كما هو موضح بالشكل (12.4).

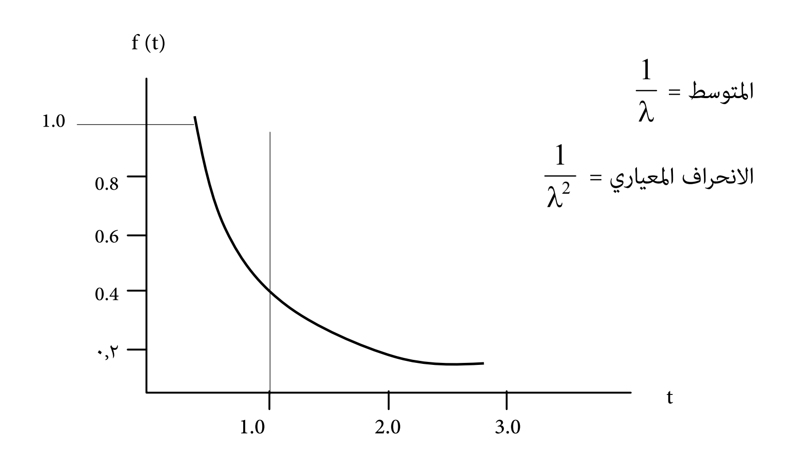


شكل : (12.4) كيفية حساب كم عدد الواصلين خلال فترة زمنية محددة

إذا رسمنا طريقة وصول العينات فنلاحظ أن التوزيع يكون توزيع أسي (Exponential distribution) كما في الشكل (12.5) وله المعادلة الرياضية التالية:

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \qquad \text{................................}(12.1)$$

حيث f (t) تمثل احتمال حصول واصلين في الفترة (t)



شكل (12.5) التوزيع الأسي عند λ=1

والجدول التالي يوضح احتمال أن العينة التالية سوف تصل عند الزمن t

	t	F (x)
دقيقة	0	1.0
	1	0.35
	2	0.15
	٤	0

أما إذا اهتمينا بعدد الواصلين خلال الفترة T حسب التوزيع المعياري الموضح في الشكل (12.6) ولإيجاد عدد الواصلين n خلال الفترة T ووصولهم عشوائيا فإن التوزيع يخضع لما يسمى بتوزيع يوسان (Passion distribution) والتي يعطي بالمعادلة الرياضية التالية.

$$P_t(n) = \frac{(\lambda Y)e^{n-\lambda T}}{\lambda!} \qquad \text{.................................(12.2)}$$

والمعادلة (12.2) توضح أن احتمال عدد n من الواصلين سوف تقدم لهم خدمات في الفترة الزمنية (T) فمثلا إذا كان نسبة الواصلين في نظام الطوابير (3) فإن (λ = 3) وترغب في إيجاد احتمال 5 وحدات سوف تصل خلال دقيقة واحدة فإن:

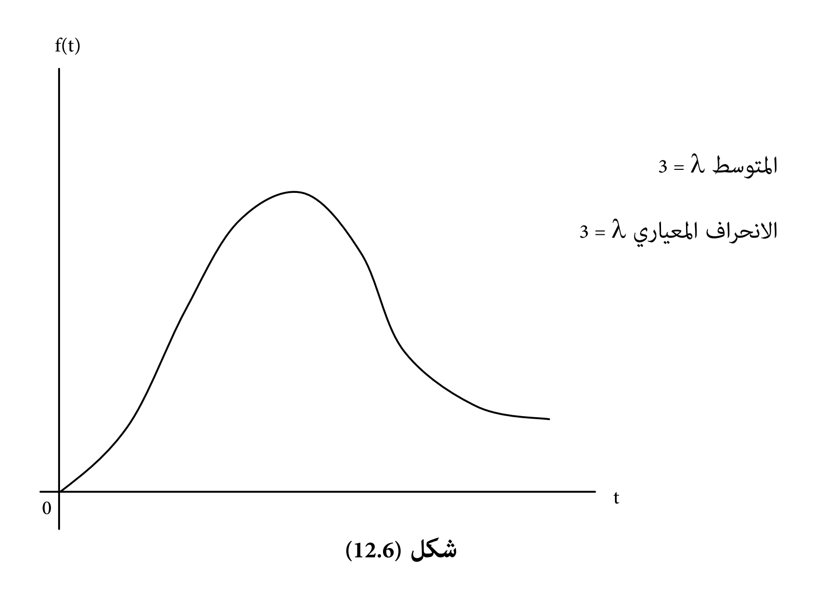
$$(n = 5 \;.\; T = 1),\ p_{1,5}$$

$$p_{1,5} = \frac{(3\times 1)e^{5-3\times I}}{5!}$$

$$= \frac{3e^{5-3}}{120} = 2.025e^{3}$$

$$p_{1,5} = 0.0101$$

وهذا يعني أن 10.1% فرصة لوصول 5 زبائن في فترة دقيقة واحدة.



شكل (12.6)

وبالمثل يمكن أن يعرف توزيع الأسي السالب وتوزيع بوسان بواسطة الجداول التي تعطي في مرفقات هذا الكتاب.

ويعرف التوزيع العام (توزيع أيرلنق) (Erlang distrbution) على النحو التالي:

$$f(t)=\frac{k\gamma(k\lambda t)^{k-1}e^{k\lambda t}}{(k-1)!}$$

حيث المتوسط = $\frac{1}{\lambda}$ والانحراف المعياري = $\frac{1}{k\lambda^2}$

حيث k أ] رقم موجب صحيح. ويختلف من توزيع إلى آخر k =1 الدرجة الأولى، k =2 الدرجة الثانية ... الخ.

وفقا لقيمة k كما هو موضح بالشكل (12.7) يكون شكل المنحنى.

-4 درجة انتظار الواصلين (Degree of patience)

يقصد بدرجة انتظار الواصلين إلى مركز الخدمة هو الصبر الذي يصاحبهم بانتظار نقطة الخدمة حتى تصبح شاغرة مهما طال زمن الانتظار حتى انتظارهم الطويل في طابور الخدمة يسمى بالصابرين.

ويوجد نوعان من المنتظرين الذين ليس لديهم صبر طويل للانتظار مركز الخدمة. نوع يعمل على دراسة طول خط الانتظار وزحمة مكان تقديم الخدمات وعليه يقرر مغادرة نظام الطوابير. ونوع ينتظر قليل في طابور المنتظرين ثم يغادر.

12.3.4 مواصفات خطوط الانتظار الطبيعية (Physical feature of lines):

-1 طول خط الانتظار (Length):

من المعروف من الناحية العملية أن الخط اللامحدود (infinite) يعتبر خط طويل من ناحية سعته الخدمية مثال وقوف السيارات في بوابة في معبر طريق أو انتظار الجمهور لقطع تذكرة دخول إلى مسرح ... الخ.

أما الخطوط المحدودة الطول مثال محطات الوقود، والميناء، ومحطة السيارات ومحطة غسيل السيارات، وطابور الشاحنات في مصنع الأسمنت، ... الخ.

-2 عدد خطوط الانتظار (Number of lines):

يقصد بالخط الوحيد مثال خط المرور من طريق عام واحد، أو بوابة دخول إلى مصنع، متجر مواد غذائية، أو أي محطة خدمات مفردة. وفي الغالب توجد خطوط متعددة للانتظار أو الخدمات. مثال محطات الوقود طرفين في مصرف تجاري أو أهلي، تسجيل الطلاب في الجامعة، خدمات الفنادق، خدمات الهاتف، خدمات الموانئ .... الخ والتي توجد فيها أكثر من بوابة، ووفقا لهذه المواصلات يمكن حساب الزمن المتوقع للانتظار والزمن المتوقع للخدمة، والتكاليف المترتبة على ذلك.

11.3.5 الاختبار في خطوط الانتظار (Selection of waiting line)

اختيار خط الانتظار يتم وفقا للأولويات الخدمة المقدمة للزبون، والتي تتمثل في عدد الزبائن في خط الانتظار - متوسط زمن الانتظار - مدى تغير زمن الانتظار = كقاعدة الخدمات المقدمة.

ومن ضمن هذه الأولويات الذي يصل أولا تقدم له الخدمة أولا (First-com first-served (FCFS).

مثال ما يحصل في الأسواق العامة والجمعيات التجارية والزراعية والمطاعم والفنادق ... الخ.

ويمكن أن تعطي الأولويات إلى حالات خاصة من الزبائن مثال المرضي في حالة الطوارئ الزبون التي يحقق ربح أكثر - الزبون الذي طلبيته أكبر - الزبون المعروف التعامل معه بدلا من زبون عمومي - أطول خط انتظار - الزبون الذي له موعد سابق.

12.3.6 مواصفات محطة الخدمة (Service facility):

يمكن أن يكون خط الانتظار مفردا - أو جماعيا - أو مخلوطا وفقا لطبيعة الخدمة. ويعتمد هذا على نوع الخدمة المقدمة والشروط اللازمة لعمل طلبية الخدمة فعلى سبيل المثال:

1- **قناة الانتظار المفردة في مستوى واحد (Single channel)**

توجد قوانين رياضية مبسطة عند توفر المعلومات عن كيفية الوصول والخدمة، مثال نوع التوزيع المعياري - مثال ذلك (حانوت الحلاقة).

2- **قناة الانتظار المفردة في مستويين (Single channel multiphase):**

مثال ذلك محطة غسيل سيارات والتي يتمثل في محطة خدمة واحدة بتسلسل. مثال الغسيل، تنظيف الأتربة، التجفيف، التلميع ... الخ آخر العملية الخدمية المطلوبة.

3- عدة قنوات في مستوى واحد Multichannel single phase):

تتمثل هذه الحالة في طرفين المصارف التجارية - يقومون بنفس الخدمات في خطوط متوازية ومتشابهة وتعتمد السرعة في الخدمات وفقا للمعاملة المالية وتوفر المعلومات من الزبون وخبرة الموظف الذي يقوم بالخدمة.

4- قنوات مختلفة في مستويات مختلفة (Multichannel multiphase)

هذه الحالة مشابهة إلى الحالة السابقة مع اختلاف أن تقدم بعض الخدمات المختلفة بتسلسل في قناة واحدة. مثال دخول المريض إلى المستشفى والتي تقدم له خدمات مختلفة ومتادلية حتى يصل إلى غرفة الإقامة في المستشفى بعد عدة فحوصات.

5- قنوات مختلطة (Mixed channels)

حيث أن فكرة القنوات المختلطة تعني وصول الزبائن إلى قنوات فردية ومتعددة ويذهبون إلى خدمات فردية ومتسلسلة.

6- معدل تقديم الخدمة (Service rate)

يقصد بمعدل الخدمة هدفين معينين: معدل خدمة ثابتة وهذا يعني أن زمن تقديم الخدمة متساوي وفقا لمعدل وصول ثابت للزبائن الذين يتلقون الخدمة. وغالبا ما تحصل هذه الحالة عندما تكون الخدمة آلية (أي بواسطة الآلة).

أما معدل الخدمة المتغير فهو يخضع للتوزيع المعياري العام وفقا لنوع الخدمة تحت توزيع (Erlang) بغض النظر عن قناة خدمة مفردة أو قنوات خدمة متعددة أو متعددة ومتسلسلة.

12.3.7 الخروج (Exit):

إذا أنهى الزبون الخدمة المطلوبة في منظومة خطوط الانتظار في الغالب احتمالان هما:

1- يمكن أن يرجع إلى عينة الوصلين لطلب الخدمة مرة أخرى أو؛
2- يمكن أن يدخل في توقع الاحتمالات الضعيفة لطلب الخدمة مرة أخرى.

ويمكن شرح الحالة الأولى للآلة تحتاج إلى صيانة وقائية دورية والحالة الثانية للآلة تم تطويرها وقدرة تحملها على الاستمرار والرجوع إلى الصيانة الوقائية أصبحت قليلة.

12.4 تطبيقات الأنماط الرياضية لخطوط الانتظار:

يحتوي هذا الجزء من هذا الفصل على أمثلة عديدة توضح كيفية استخدام القوانين الخاصة بنظم خطوط الانتظار والتي سوف تستعرض في الجدول (12.1)، (12.2) ، (12.3) ، (12.4).

1- نمط رقم (1) (Model 1)

مصرف الجماهيرية بطرابلس استحدث طريق لسحب النقود بواسطة طرفين السين داخل صالة المصرف. ومن خلال إدارة المصرف توقعت أن معدل قدوم الزبائن هو 15/ الساعة وأن معدل خدمة الزبون الواحد 3 دقائق وإذا فرضنا أن توزيع الواصلين يخضع لـ (Poission) وأن توزيع الخدمات تخضع لـ (exponential) أحسب المعلومات التالية.

1- كفاءة آلة الصرف.
2- متوسط عدد الزبائن المنتظرين.
3- متوسط عدد الزبائن في منظومة خط الانتظار.
4- متوسط الزمن اللازم للانتظار في خط الانتظار.
5- متوسط الزمن اللازم في منظومة الانتظار بما في ذلك زمن الخدمة.

جدول (12.2)

Infinite queuing notation (infinite)

σ	=	Standard deviation
λ	=	Arrival rate
λ	=	Service rate
$1/\mu$	=	Average service time
$1/\lambda$	=	Average time between arrivals
p	=	Potential utilization of the service facility (defined as λ/μ)
$\bar{n}_t$	=	Average number waiting in line
$\bar{n}_s$	=	Average number in system (including any being served)
$\bar{t}_t$	=	Average time waiting in line
$\bar{t}_s$	=	Average total time in system (including time to be served)
K	=	Kth distribution in the Erlang family of curves
n	=	Number of units in the system
M	=	Number of identical service channels
Q	=	Maximum queue length (sum of waiting space and service space)
P_n	=	Probability of exactly" units in system
P_w	=	Probability of wailing in line

جدول (12.3)

Finite queuing notation (based on Peck and Hazelwood tables)

D	=	Probability that an arrival must wait in line
F	=	Efficiency factor, a measure of the effect of having to wait in line
H	=	Average number of units being serviced
I	=	Population source less those in queuing system (N - n)
L	=	Average number of units in line
M	=	Number of service channels
n	=	Average number of units in queuing system (including the one being served)
N	=	Number of units in population source
p_n	=	Probability of exactly n units in queuing system
T	=	Average time to perform the service
U	=	Average time between customer service requirements
W	=	Average waiting time in line
X	=	Service factor or proportion of service time required

جدول (12.4)

Equations for models in Exhibit 9.8 (see Exhibit 9.9 for explanation of notation)

Model 1

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} & \bar{t}_t = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} & P_n = \left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \\ \bar{n}_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} & \bar{t}_s = \dfrac{I}{\mu-\lambda} & P = \dfrac{\lambda}{\mu} \end{cases}$$

Model 2

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} & \bar{t}_t = \dfrac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t \dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t + \dfrac{I}{\mu} \end{cases}$$

Model 3

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left[\dfrac{1-Q\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1} + (Q-1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q}\right)}\right] \\ \bar{n}_s = \dfrac{\lambda}{\mu}\left[\dfrac{1-(Q+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q} + Q\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right)}\right] \qquad P_n = \left[\dfrac{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}}\right]\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \end{cases}$$

Model 4

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} & \bar{t}_t = \dfrac{\dfrac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t \dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t \dfrac{I}{\mu} \end{cases}$$

Model 5

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{K+1}{2K} \cdot \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t + \dfrac{\lambda}{\mu} \end{cases} \qquad \bar{t}_t = \dfrac{K+1}{2K} \cdot \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad \bar{t}_s = \bar{t}_t \dfrac{1}{\lambda}$$

Model 6

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda\mu\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M+1)!(M\mu-\lambda)^2} P_o \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t \dfrac{\lambda}{\mu} \\ P_o = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1} \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M}{M!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)}} \end{cases} \qquad \bar{t}_t = \dfrac{P_o}{\mu M M!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)^2}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M \qquad \bar{t}_s = \bar{t}_t \dfrac{I}{\mu} \qquad P_M = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M \dfrac{P_o}{M!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)}$$

This is a finite queuing situation that is most easily solved by using finite tables. These tables, in turn, require the manipulation of specific terms (see Exhibit 9.9 for notation)

Model 7

$$\begin{cases} X = \dfrac{T}{T+U} \qquad H = FNX \qquad L = N(1-F) \\ P_n = \dfrac{N!}{(N-n)!} X^n P_o \qquad J = NF(1\text{-}X) \\ W = \dfrac{L(T+U)}{N-L} = \dfrac{LT}{H} \qquad F = \dfrac{T+U}{T+U+W} \\ n = L + H \end{cases}$$

1- كفاءة آلة الصرف:

$$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

حيث:

λ معدل انتظار الزبون

μ معدل خدمة الزبون.

p كفاءة آلة الصرف.

$$P = \frac{15}{20} 75\%$$

2- متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار (الجدول 12.2 - 12.3)

$$\bar{n}_L = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(15)^2}{20(20-15)} = 2.25 \quad \text{زبون}$$

3- عدد الزبائن في المنظومة:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{15}{20-15} = 3 \quad \text{زبائن}$$

4- متوسط زمن الانتظار في خط الانتظار:

$$\bar{t}_e = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{15}{20(20-15)} = 0.15 \quad \text{ساعة}$$

5- متوسط زمن الانتظار في المنظومة:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{1}{20-15} = 0.2 \quad \text{ساعة}$$

وبما أن المساحة المتاحة في صالة المصرف للانتظار محدودة وحتى يتوفر مستوى جيد من الخدمات المصرفية المتعارف عليها. عليه رأت الإدارة لتأكد من تحقيق هذا الغرض بنسبة لا تقل عن 95% من الثقة بمعنى أن عدد الزبائن في المنظومة لا يزيد عن 3 زبائن في لحظة زمن محددة. وبذلك فإن مستوى الخدمات لـ 3 زبائن أقل ما يمكن تحديده على النحو الآتي:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

عند $n = 0$ $\quad P_0 = (1- 15/20)\ (15/20)^0 = 0.250$

عند $n = 1$ $\quad P_1 = (1- 15/20)\ (15/20)^1 = 0.188$

عند $n = 2$ $\quad P_2 = (1- 15/20)\ (15/20)^2 = 0.141$

عند $n = 3$ $\quad P_3 = (1- 15/20)\ (15/20)^3 = 0.106$

المجموع 0.685 أو 68.5%

وهذا يعني أن احتمال تواجد أكثر من 3 زبائن في النظام يساوي

$(1-0.685) = 31.5\%$

ولتحقيق أن 95% لا تزيد عن الزبائن في النظام أكثر من 3

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 95\%$

وللتعويض عن هذه الاحتمالات

$$0.95=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{0}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3}$$

$$0.95=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3}\right]$$

ويمكن حل هذه المعادلة بواسطة وضع قيم فرضية لـ λ و μ حتى يحصل التساوي في طرفي المعادلة.

$\frac{\lambda}{\mu}=0.5$ $\quad 0.95 \overset{?}{=} 0.5\ (1 + 0.5 + 0.25 + 0.125)$

$0.95 \neq 0.9675$

$\frac{\lambda}{\mu}=0.45$ $\quad 0.95 \overset{?}{=} (1 - 0.45)\ (1 + 0.45 + 0.203 + 0.091)$

$\frac{\lambda}{\mu}=0.47$ $\quad 0.95 \overset{?}{=} (1 - 0.47)\ (1 + 0.47 + 0.221 + 0.104)$

$0.95 \neq 0.95135$

وعليه فإن كفاءة استخدام النظام P تساوى 47% بحيث تحقق احتمال أن 3 زبائن في النظام يكون نسبة 95% ثقة.

$$0.47=\frac{\lambda}{\mu}\Rightarrow \mu=32/\text{ساعة}$$

نمط رقم (2):

شركة مساهمة تقوم بإدارة محطة وقود ومحطة غسيل وتشحيم سيارات خلال عدة مناطق في الجماهيرية الليبية، وتعتزم هذه الشركة في سياساتها الاستثمارية أعطاء غسيل مجاني في حالة تعبئة السيارة بالكامل بالوقود. وفي حالة غسل يدفع الزبون 5000

درهم، علما بأن الفائدة الموقعة من تعبئة سيارة بالكامل 7000 درهم وتكلفة غسيل السيارة الواحدة 1000 درهم، وتمتد ساعات العمل بالشركة حوالي ١٤ ساعة يوميا.

وتحتوي المحطة الواحدة على ثلاث وحدات غسيل. الوحدة الأولى تقوم بغسيل السيارة الواحدة في خمس دقائق ويمكن تأجيرها 12000 درهم في اليوم، والوحدة الثانية تقوم بغسيل السيارة في كل 4 دقائق، ويكلف إيجارها 16000 درهم في اليوم. والوحدة الثالثة تقوم بتغسيل السيارة في كل 3 دقائق، ويكلف إيجارها 22000 درهم في اليوم.

ومن خلال الإحصائيات تبين أن الزبون لا يستطيع أن ينتظر أكثر من 5 دقائق في خط الغسيل. ومتوقع نسبة وصول الزبائن إلى المحطة 10/ ساعة. ما هي المحطة التي يجب اختيارها للإيجار.

الحل:

بناء المعادلات الواردة في الجدول (12.4):

الوحدة رقم (1) $\mu = 12$

$$\bar{t}_L = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{2(12)(12-10)} = 0.208 \text{ hr}$$ (ساعة)

الوحدة رقم (2) $\mu = 15$

$$\bar{t}_L = \frac{10}{2(12)(12-10)} = 0.267 \text{ hr}$$ (ساعة)

إذا اعتبرنا أن زمن الانتظار كمواصفات قياسية للمفاضلة فإن الوحدة رقم (2) أجدر بالاختيار.

أما الوحدة رقم (1) حيث دقائق $t = 5$ فإن متوسط طول خط الانتظار للزبائن وذلك بحل المعادلة أعلاه لحساب λ (معدل وصول الزبائن).

$$\bar{t}_L = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

$$\lambda = \frac{2\bar{t}_L\mu^2}{1+2\bar{t}_L\mu}$$

$$\lambda = \frac{2(1/12)(12)^2}{1+2(1/12)(12)} = 8$$ زبون/ الساعة

وبما أن القيمة التقديرية الأولى لـ $\lambda = 10$/ ساعة وهذا يعني أن المحطة سوف تحضر عدد 2 زبون في الساعة وهو يعزز الإجابة الأولى.

نمط (3):

مصنع أعلاه الحيوانات، يستوعب خط لتعبئة سيارات النقل الخفيفة 4 سيارات بما في ذلك السيارة التي تحت التعبئة. معدل متوسط وصول السيارات إلى المصنع من مختلف جمعيات مربي الحيوانات 40 سيارة في الساعة. ومعدل تعبئة السيارة آليا 40 سيارة/ساعة. ومتوسط الربح في العبوة الواحدة ½ د.ل (السعر مدعوم). ويمكن إيجار محطة انتظار السيارة بجانب المصنع بمعدل 5 د.ل/ اليوم، ويعل المصنع على ورديتين بمعدل 14 ساعة يوميا. إذا فرضنا أن توزيع الوصول (Poission) وتوزيع تقديم الخدمة (Exponential). هل تنصح بإيجار المحطة التي داخل المصنع وكم يكون سعته؟

الحل:

بالنظر إلى معادلات نمط (3) في الجدول (12.4).

فإن احتمال أن الإنتاج تحت التعبئة يعطي بالمعادلة التالية:

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})Q+1}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

للاحتمال أن لا توجد سيارات نقل خفيف في المنظمة عند q = 4

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})Q+1}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\circ}$$

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{40}{50}}{1-(\frac{40}{50})^5}\right](1) = 0.298$$

∴ إن عملية التعبئة مثمرة

1 - 0.298 = 0.702 أو 70.2%

وعندما يكون قراج (محطة السيارة واحد مؤجرة) (Q = 4+1)

$$P_n = \left(\frac{0.2}{1-(\frac{40}{50})^6}\right) = 0.271$$

عندما تكون الخدمة بداية 0.729 = (1 - 0.271)

أي بزيادة 0.271 - 0.702 = 2.8%

$$0.028(50\frac{\text{سيارة}}{\text{الساعة}}\times 14\frac{\text{ساعة}}{\text{اليوم}}\times\frac{0.5}{\text{السيارة}}) = 9.50\text{L.D}$$

عندما يريد تأجير لسيارتين

Q = 4 + 2 = 6

$$P_0 = \left(\frac{0.2}{1-(\frac{40}{50})^7} \right) = 0.253$$

واحتمال أن مكان التعبئة مشغول

1 - 0.253 = 0747 أو 74.7%

ويمكن أن نلاحظ التغير الذي يحصل وفقا لزيادة إيجار المحطة.

ويمكن معرفة عدد السيارات في النظام، والتي تشمل الموجودة في الخط وتحت التعبئة بالإضافة إلى تأجير لمكان سيارتين في محطة المصنع.

$$\overline{n}_s = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1-(Q+1)(\frac{\lambda}{\mu})^Q + Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}} \right)$$

$$\overline{n}_s = \frac{40}{50}\left(\frac{1-(6+1)(\frac{40}{50})6 + 6(\frac{40}{50})7}{(1-\frac{40}{50})(1-\frac{40}{50})^{71}} \right)$$

$\overline{n}_s = 2.15$ سيارة

نمط (4):

حلاق يستغرق 15 دقيقة لقص شعر أي زبون. يصل الزبائن إلى دكان الحلاقة على توزيع Poission بمتوسط نسبة الواصلين 2/الساعة. فإذا فرضنا أن لك موعد

بعد وصولك دكان الحلاقة بعد زمن قدره 30 دقيقة. وأن بعد مكان الموعد التي بعد الحلاقة يستغرق 3 دقائق مشيا. وأن زمن قص الشعر يخضع لتوزيع .Erlang dist حيث k = 3. هل تتوقع أنك تصل موعدك في الوقت المناسب؟

الحل:

إذا علمت أن:

$\mu = 4 \;,\; \lambda = 2$

∴ المشكلة هي حساب الزمن المتوقع الذي يقضيه الزبون في المنظمة ($\bar{t}_s$)

$$\bar{t}_s = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}$$

بالتعويض في المعادلة وفق الجدول لنمط (5)

$$\bar{t}_s = \frac{3+1}{2(3)} \cdot \frac{2}{4(4-2)} + \frac{1}{4}$$

$\bar{t}_s = \dfrac{5}{12}$ ساعة , أو 25 دقيقة

وبناء على ذلك من الممكن أن تعمل موعد آخر بعد الحلاقة. لأنك تحتاج إلى 30 دقيقة من بداية الحلاقة إلى وصولك إلى موعدك وأن 30>25

12.5 مسائل:

1- هل يمكن استخدام نظام خطوط الانتظار في إخراج المواقع الصناعية؟

2- ما الفرق ما بين مناة ومرحلة.

3- ما هي الفرضيات والمعطيات التطبيق نموذج رقم (1).

4- متى يجوز استخدام طريقة (FcFs) أعطي أمثلة تطبيقية في الصناعة.

5- هل تتوقع استخدام توزيع الأسي في أنواع الخدمات التالية:

أ - شراء تذاكر خطوط الطيران.

ب- الخروج أو المغادرة من الفندق.

ج- الانتهاء من امتحان الفترة الثانية في مادة دراسية ما.

6- محطة غسيل وتغيير زيوت محركات السيارات، تقدم الخدمات للمواطنين كل يوم، ومعدل وصول الزبائن 3/ الساعة، وتقدم الخدمات بمعدل 15 دقيقة، وتتم الخدمات بواسطة الفنيين لكل سيارة تأتي أولا ... الخ. فإذا فرضنا أن الوصول يتم وفق توزيع (Poission) وأن الخدمات تتم وفق توزيع (Exponentiol). أحسب:

أ - كفاءة تقديم الخدمات.

ب- عدد السيارة في خط الانتظار.

ج- الزمن اللازم لانتظار السيارة قبل موعد تقديم الخدمة.

د- مجموع الزمن التي تأخذه السيارة في المنظومة (خدمات + انتظار).

7- تشاركية مواد تموينية تقوم بتقديم الخدمات إلى جامعة ما بواسطة الآلات الأتوماتيكية للحصول على المشروبات والفواكه وبعض المرطبات. نظرا لطبيعة المستهلكين (الطلاب) وعدم اهتمامهم بحسن استعمال هذه الآلات والتي تتطلب صيانة دورية للآلات. وجد أن معدل حدوث العطل في الآلات 3/ الساعة. وحيث أن الأعطال تقع تحت التوزيع Poission. وأن تكلفة حصول العطل تساوي 25 ديكار/الساعة/ الآلة. وأن تكلفة ساعة فني الصيانة 4 د.ل وأن متوسط صيانة الآلات بواسطة فني واحد 5/الساعة حسب التوزيع (Exp)، وأن العدد اللازم من مشرفي الآلات 2 لكل 7 آلات/ ساعة. وأن مشرفي الآلات 3 لكل 8 الآلات/ الساعة.

ما هو الحد الأدنى من المشرفين (الفنيين) اللازم لصيانة الآلات الدورية يوميا لأقل تكلفة ممكنة؟

8- في الحالات التالية عرف مكونات نظام الانتظار (الزبون) نوع الخدمة، تصميم مكان الخدمة، أهداف الخدمة، عدد فئة الزبائن محدود أو غير محدودة ... الخ).

أ - طابور الزبائن في أحدى الأسواق العامة.

ب- طابور العربات في إشارة المرور.

ج- عيادة خارجية لمعالجة الزبائن.

د- المسافرين على أحدى رحلات الخطوط الجوية.

هـ- مركز استخدام الحاسب الآلي في إحدى الجامعات.

و- طرف أوتوماتيكي يعمل لمدة 24 ساعة.

9- زبون يصل مكان الخدمة تباعا إلى توزيع Poission بمعدل قدره 2/ الساعة. أوجد:

أ - متوسط عدد الزبائن يصلون في مدة 8 ساعات.

ب- احتمال أن زبون واحد يصل خلال ساعة على الأقل.

10- إذا علمت أن الواصلين في خط خدمة مفردة في منظومة الانتظار يحصل وفقا إلى توزيع Poission بمتوسط قدره 5/ الساعة. أما توزيع تقديم الخدمة فهو يخضع لتوزيع المنتظم الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 5 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

أحسب ما يلي:

أ - احتمال أن منظمة الانتظار مشغولة.

ب- عدد الزبائن المتوقع في المنظومة.

ج- الزمن المتوقع انتظاره في خط الانتظار.

الفصل الثالث عشر

المحاكاة

يناقش هذا الفصل علم المحاكاة، كمفهوم وأهداف وتطبيقات، بالإضافة إلى تسليط الضوء على أشكال المحاكاة وتسلسل عملياتها.

الفصل الثالث عشر



المحاكاة

Simulation

13.1 مقدمة:

المحاكاة وهي نمذجة تختبر سلوكياته خلال فترة زمنية معنية. أو هي القدرة على اختيار أي نظام من خلال متغيراته بدون التطبيق المباشر. ويتميز علم المحاكاة باختيار المنظومات بدون مخاطرة وبأقل تكلفة ممكنة وبأكثر أمان من اختبار النظام المباشرة

ويمكن التعبير عن المنظومات الفعلية ودراسة التغيرات التي تحدث فيها بواسطة نماذج وأنماط وقوانين رياضية والتي تعكس نتائج المنظومات الفعلية. والمحاكاة هي أيضا عبارة عن تجربة إحصائية تخضع للتحليل الإحصائي والاختبارات الاحتمالية.

12.3 أهداف تطبيقات المحاكاة:

تستخدم المحاكاة في تحليل المشاكل العملية التي تنحصر في نوعين:

1- مشاكل نظرية في العلوم الأساسية مثل الرياضيات والفيزياء والكيمياء، وتشتمل على:
   - أ - تقدير مساحة منحنى.
   - ب- معكوس المصفوفة.
   - ج- تقدير قيمة (ط = 3.1414) في الرياضيات.
   - د- حل مسألة حركة جزئيات في مستوى.
   - هـ- دراسة حركة جزئيات في مستوى.
   - و- حل معادلات آنيا في الجبر.

2- مشاكل عملية في الحياة الفعلية:

أ - محاكاة لمشكلة صناعية (مثل تصميم عمليات كيميائية، نظم التخزين والتحكم فيه، تصميم منظومة توزيع، تخطيط الصيانة، تصميم نظام الطوابير، تخطيط الإنتاج المستمر، تصميم منظومة معلومات واتصالات).

ب- محاكاة لمشكلة تجارية واقتصادية (تشغيل وإدارة الشركات) سلوك المستهلك، تحديد الأسعار، الحسابات، عمليات التسويق، دراسة الاقتصاد العام، التضخم، الإنتاجية ... الخ.

ج- المشاكل الاجتماعية (مثل حركة ونمو السكان، التطور الاجتماعي ... الخ).

د- محاكاة منظومات تركيب الإنسان وحركته الطبية (مثل سير الدم، والماء، توزيع الجهد في جسم الإنسان، نمذجة الدماغ ... الخ).

هـ- محاكاة الحروب البرية والجوية والبحرية والحرائق .. والأشياء المفاجأة.

13.3 خطوات تطبيق المحاكاة:

1- تعريف المشكلة:

يقصد بتعريف المشكلة تحديد الهدف من الدراسة وما هو المطلوب.

2- تحليل التكاليف والفوائد:

بما أن دراسة المحاكاة مكلفة عليه يستوجب دراسة التكاليف المناسبة والفوائد المتوقعة من الدراسة.

لأن طرق تنفيذ المحاكاة تختلف من سريع إلى أسرع ومن مكلف إلى أكثر تكلفة.

3- اختصار النظام الحقيقي إلى نموذج (Short coding the model)

النظام الحقيقي الذي سوف يحول إلى نموذج. فمثلا الزبون الذي يستخدم طرف في مصرف تجاري، النشاط الذي يقوم به الزبون (سحب مبالغ من حسابه - إيداع -

تعاملي تجاري، ... الخ) إيجاد علاقة رياضية لدرجة وصول الزبون - مدة الخدمة التي تقدم له .. ومواصفات أخرى.

4- **تحويل النموذج إلى لغة الحاسوب (Code the model):**

للاستخدام الحاسوب، يجب أن تحول كل المعلومات الواردة في النموذج إلى لغة الحاسوب والتي يمكن التعامل معها مثل لغة محاكاة الحاسوب (Subscript Dynamic Gpss). حيث أن هذه اللغات طورت لاستخدامها في المحاكاة.

5- **تحقيق نتائج النموذج (Validate the Model):**

إذا لم تعطي نتائج النموذج نتائج مكافأة ومساوية للنتائج المتوقعة في النظام الحقيقي فإن نظام المحاكاة يعطي إجابة خاطئة ويقصد بالتحقيق (Validation) الوصول إلى نتائج لها درجة عالية من الواقعية إذا لم تكن مطابقة للحقيقة.

6- **التخطيط لإجراء التجربة (Plan the Experiment):**

إن تصميم التجربة الناجمة يوفر خطة قوية لتعزيز النتائج المرجوة والتي يعتمد عليها في اتخاذ القرارات؟

7- **عقد الدراسة وتجميع المعلومات (Conduct the study and collect data):**

يعتبر نوع المعلومات المجمعة معتمدا على أهداف الدراسة ونوع التحليل المعقود.

8- **تحليل المعلومات وإعطاء النتائج (analyze Data and Draw Conclusions)**

9- **توثيق المعلومات وتنفيذ النتائج (Document and implement the findings)**

13.4 أشكال المحاكاة:

1- **النموذج المماثل (Analogue model):**

يعتبر النموذج المماثل من المحاولات الأولى في استخدام علم المحاكاة، فعلى سبيل

المثال نموذج القياس الفيزيائي باستخدام نماذج ميكانيكية، كهربائية أو هيدروليكية، ولحد الآن مازالت هذه الأنواع من النماذج مستخدمة في حالات خاصة. وفي السنوات الأخيرة بدأ استبدالها بنماذج المحاكاة بواسطة لغة الحاسوب.

2- مونتي كارلو (Mote Carlo Simulation):

أحد أشكال تحليل المحاكاة والذي يستخدم الأرقام العشوائية لتحقيق قيم إحصائية لتغيرات النظام. إن مونتي كارول طريقة ذات خطوط محددة كلاسيكية الاستخدام. وهي طريقة تعتمد على أخذ العينات من نظام حقيقي.

3- المحاكاة بالحاسوب (Computer Simulation):

في نظم المحاكاة فإن أي رقم عشوائي من أي عينة وفقا لأي توزيع يعتمد على استخدام المجال (1،0)، وقبل اختيار عدد العينات التي تؤخذ للدراسة يجب أن تخضع للشروط الآتية:

أ - كل القيم محصورة في الفترة [1،0] ولهن فرصة متساوية لحدوث أي احتمال، بمعنى آخر توزيعها منتظم (Uniform distribution).

ب- الأرقام المختارة للدراسة محصورة في الفترة [1،0] وتحت اختيار عشوائي. وبمعنى آخر غير معتمدة على بعضها في عملية الاختيار.

مثال 13.1:

إذا فرضنا أن الخدمات التي تقدم في أحدى محطات الوقود عند t وتخضع للتوزيع الأسي بمعدل خدمة قدرها μ لكل وحدة زمن. وأن دالة احتمال التوزيع (PDF) (Probability distribution function)

$$f(t) = \mu^{e^{-\mu t}} \quad , t > 0$$

فإن

$$f(t) = \int_0^t \mu^{e-\mu t} dx = 1 - e^{-\mu t}$$

فإذا كان المدى (R) يكون (0 ، 1) وبوضع f(t) = R نحصل على الآتي:

$$R = 1 - e^{-\mu t}$$

ومنها:

$$t = \frac{1}{\mu} \ln(1-R) = -\frac{1}{\mu} \ln R$$

13.5 إيجاد متغيرات عشوائية بواسطة توزيع الاحتمالات:

13.5.1 التوزيع المنتظم (The uniform distribution)

لو فرضنا أننا نريد أن نحاكي التوزيع المنتظم الذي يمثل بالدالة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{4} \qquad 3 \le x \le 7;$$

$f(x) = 0$ غير ذلك

$$\therefore f(x) = \int_0^x \frac{1}{4} dt = \frac{t}{4}\Big|_3^x = \frac{1}{4} \times -\frac{3}{4}$$

ويمكن الحصول على أرقام عشوائية ما بين(0 ، 1)

فإذا فرضنا أن f(x) = r

x = 4x + 3

وعند استخدام الأرقام العشوائية في الجدول (13.1) نحصل على الآتي:

جدول (13.1)

Y	X
0.062041502	3.2616
0.392403	4.56961
0.7658045	6.06321
0.06319117	3.252764

13.5.2 التوزيع الأسي Exponential Distobution:

$$f(x) = \frac{1}{\Theta} e^{-x/\Theta} \qquad 0 \le x \le \infty$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\Theta} \cdot e^{-t/\Theta} dt$$

$$f(x) = e^{-t/\Theta}\Big|_0^x = 1 - e^{-x/\Theta}$$

فإذا استبدلنا x بـ r

$$r = 1 - e^{-x/\Theta}$$

$$e^{-x/\Theta} = 1 - r$$

خذ log للطرفين

$$-\frac{x}{\Theta} \ln e = \ln(1-r)$$

$$x = -\Theta \ln(1-r)$$

إذا $\Theta = \frac{1}{4}$ فإن

$$f(x) = 4^{e-rx} \qquad 0 \le x \le \infty$$

وباستخدام الجدول 13.2

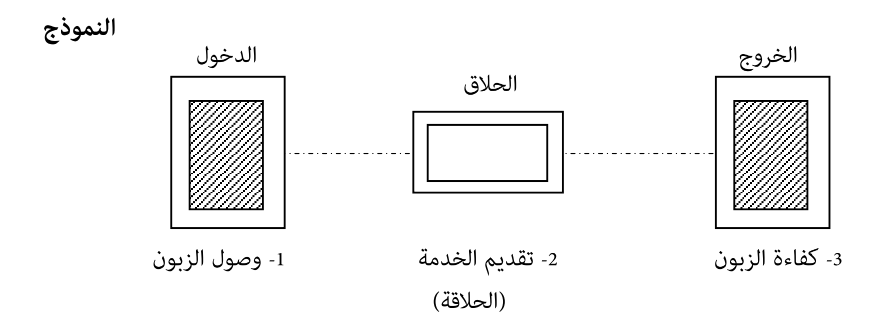
جدول (13.2)

r	ln(1+r)	$x = -\frac{1}{4}\ln(1-r)$
0.0654	0.06764	0.01691
0.3924	0.49824	0.12456
0.7658	1.45158	0.36289
0.06319	0.06527	0.01632

13.6 مثال تطبيقي للمحاكاة:

يفرض هذا النموذج أن زبون يصل إلى كرسي حلاق سعته كرسي واحد، يقدم له الخدمات (قص شعر) تحت نظام الذي يصل الأول تقدم له الخدمة أولا، ثم يغادر الحلاق. وفترة الزمن بين الزبائن تخضع للتوزيع المنتظم خلال فترة زمنية محدودة 6±24 دقيقة. زمن تقديم الخدمة يخضع للتوزيع الأسي بمعدل 20 دقيقة للزبون.

النموذج



وتحل المسألة بواسطة استخدام برنامج بالحاسب الآلي كالآتي:

Program Details (13.1) جدول

1. DEFINITION	
O=(BARBER)	; background file name is BARBER, OL Y
@QUEUE=(O)	; record the number of customers in queue
% ARR = (0) % SER = (0)	; random interarrival/service time
% M ARR = (24:0)	; mean/deviation of interarrival time
% D ARR = (6:0)	
% M SER = (20:0)	; mean value of service time
% MOVE = (0:30)	; move delay time
* ARRIVE = (XY(12,11))	; arrival/service/leaving screen locations
*BARER:= (XY(38,11))	
*LEA VE = (XY(4I,6))	; location for displaying value of queue length
J = (1,*,1,0,0,1,500)	;customers routeing, total 500 customers
U = (1,BARBER, *BARBER)	;count utilization of the barber
2. ROUTEINGS	
BR(1, * ARRIVE,%ARR)	; 1. CUSTOMERS ARRIVE
RV(U,%ARR, %M ARR,	
%DARP)	; generate random interarrival time
IV(@QUEUE)	; queue length increases 1
FV(*Q DISP,@QUEUE)	;display queue value
MR(23,%MOVE)	; move toward barber to get service
MR(*BARBER,O)	; 2. CUSTOMERS TAKE HAIRCUT
DV(@QUEUE)	; queue length decreases 1
PV(*Q DISP, @QUEUE)	;display queue value
RV(E,%SER,%M SER)	;take a hair-cut time
WT(%SER)	
MR(2S,%MOVE)	; 3. CUSTOMERS LEAVE
MA(*LEA VE,O)	; leave barber shop
ER	

A: Courtesy of Mr Sun Qi Zhi, formerly of Manufacturing and Engineering Systems, BruneI University

13.7 أنواع المحاكاة بالحاسوب:

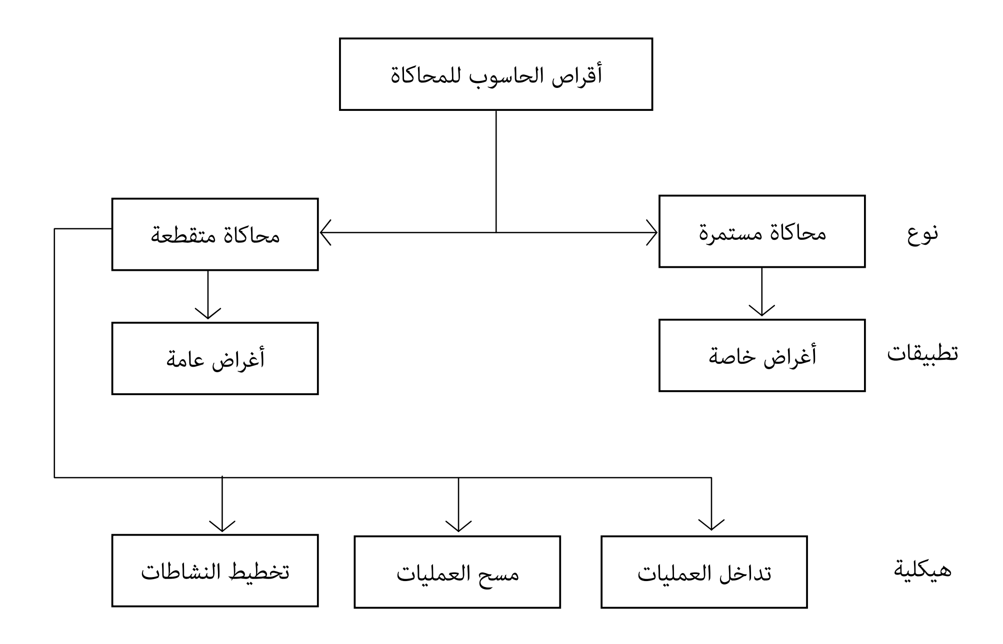
1- المحاكاة المستمرة (Continuous simulation):

إن نظم المحاكاة المستمرة تمثل بواسطة متغيرات تتغير باستمرار خلال الزمن والتي يمكن استخدامها في اختيار نظام ديناميكي.

2- المحاكاة القطعية (Discrete simulation):

إن نظم المحاكاة المستمرة تمثل بواسطة متغيرات تتغير باستمرار خلال الزمن والتي يمكن استخدامها في اختيار نظام ديناميكي.

ويمكن تصنيف أنواع طريقة حساب المحاكاة وتطبيقاتها وتركيبها كما هو في الشكل 13.1.



شكل (13.1) تصنيف نظم الحواسيب للمحاكاة

13.8 مثال تطبيقي:

ترغب شركة الأعلاف بأمانة الثروة الحيوانية في تحديد موقع صومعة لتخزين الحبوب الموردة من مختلف المناطق الزراعية بمنطقة فزانن. والمطلوب معرفة السعة اللازمة للصومعة وكم عدد الشاحنات التي يجب أن ترسل يوميا لتصدير الحبوب إلى الشمال، وعلى أمانة الزراعة معرفة كميات الحبوب الموردة يوميا بالأطنان من المزارعين في فصل جني الحبوب، عليه ترغب أمانة الزراعة في دراسة لمحاكاة الواقع الفعلي المتوقع لمعرفة عدد الشاحنات المطلوب وصولها يوميا لتعبئتها - والنموذج الموضح بالشكل 12.3 يوضح تسلسل العمليات المطلوبة.

ولحل هذه المشكلة استخدم طريقة مونتي كارو لاختيار عدد الشاحنات التي تصل من الشمال في كل ساعة وكذلك استخدمت في اختيار كميات الحبوب التي تضع في شاحنة.

إن احتمال 0.10 لوصول شاحنة واحدة. خلال ساعة

إن احتمال 0.60 لوصول شاحنة واحدة. خلال ساعة

إن احتمال 0.30 لوصول ثلاث شاحنات. خلال ساعة

وهذه الاحتمالات دونت في الشكل 13.3 ، علما بأن عددا مكونا من رقمين قد أختير كرقم عشوائي.

فمثلا:

الرقم من 00 وحتى 09 احتمال وصول شاحنة واحدة في الساعة.

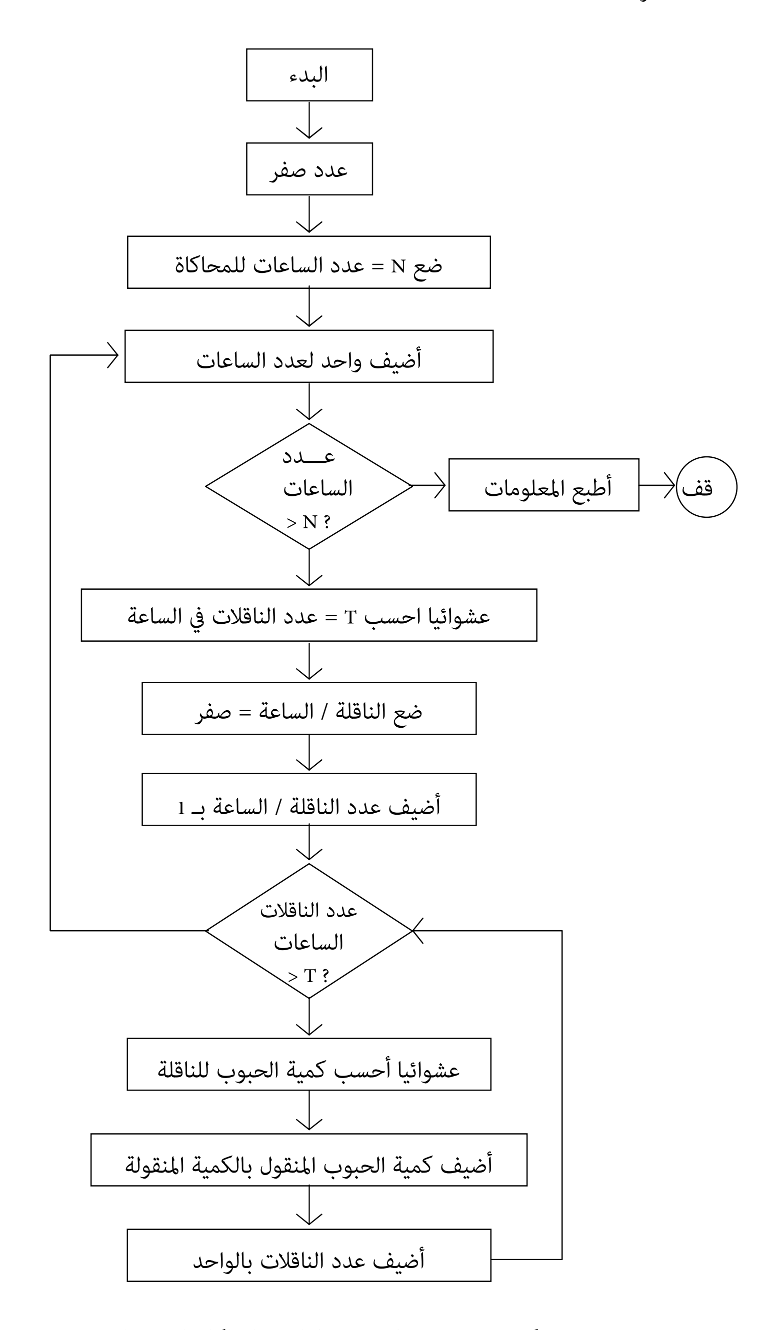
الرقم من 10 وحتى 69 احتمال وصول عدد 2 شاحنة.

الرقم من 70 وحتى 99 احتمال وصول عدد 3 شاحنة.

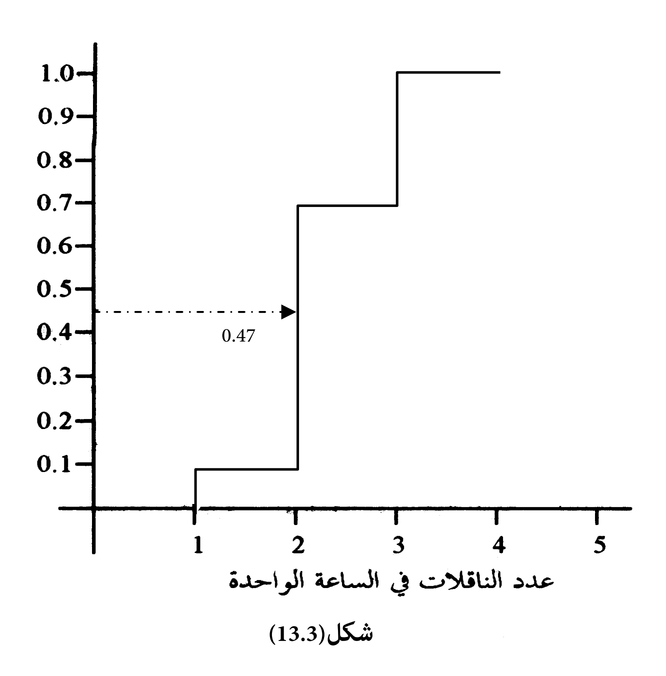
وبناء على اختيار هذه الأرقام يمكن تحديد عدد الشاحنات التي تصل في الساعة عشوائيا.

السؤال الثاني الذي يجب الإجابة عليه هو: ما كمية الحبوب التي يجب أن تحملها كل شاحنة أو شاحنة بالمقطورة؟ من المعروف بأن الكمية التي يمكن أن تشحن متغيرة باستمرار ما بين 50 إلى 350 طن. وتوزيع الاحتمال المركب (Cumulative prob. distribution) لكميات الحبوب المشحونة بواسطة الناقلة موضحة بالشكل (13.4).

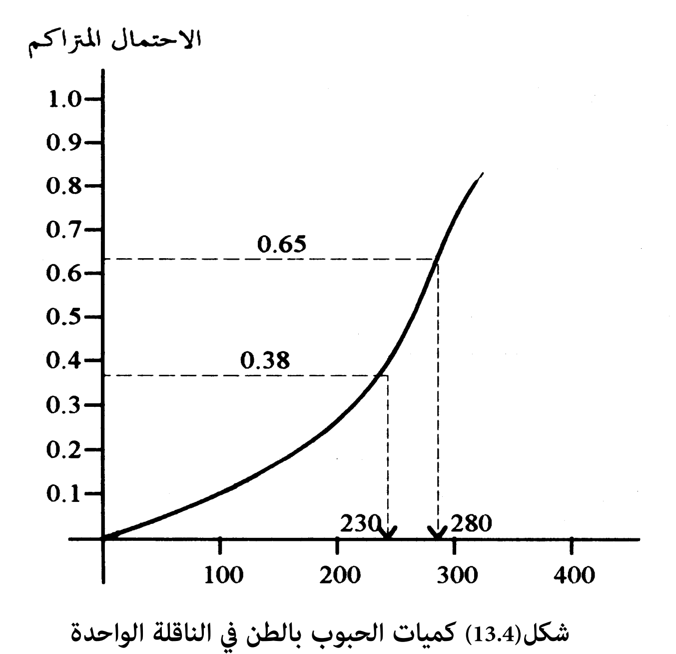
فلو لاحظت المنحنى ينخفض ما بين 250 إلى 300 طن. وهذا يعني أن حمولة الشاحنة تقع في هذا المجال. فمثلا لو أخذنا أول رقم عشوائي وليكن 38 فإن أول شاحنة تأخذ 230 طن. ولو أخذنا رقم عشوائي وليكن 67 فإن الشاحنة الثانية تحمل 280 طن. فإن خلال محاكاة الساعة الأولى نلاحظ أن الصومعة تأخذ 510 طن حبوب.



شكل (13.2) تسلسل عمليات المحاكاة لنقل الحبوب



شكل(13.3)



شكل(13.4) كميات الحبوب بالطن في الناقلة الواحدة

13.9 تطبيقات المحاكاة

إن تطبيقات المحاكاة واسعة وشاملة لكل العلوم سواء الزراعية، الحكومية، نشاطات عسكرية، التربية والتعليم، الرياضة، الهندسة، العلوم الأساسية، العلوم الاجتماعية، والعلوم التجارية. وعلى سبيل المثال سوف نذلل ذلك ببعض الأمثلة:

1- نظام الطوابير، نظام التخزين، تخطيط الإنتاج.

2- حساب السعة الاستيعابية من طاقة بشرية ومواد خام.

3- استخدام المحاكاة في تنبؤ الأنظمة الحديثة وفائقة التقنية، مثال استخدام الأتومية في المصانع الكبيرة، الأنظمة الإنتاجية المرنة، تصميم أنظمة الإنتاج.

4- استخدام المحاكاة في برامج الصيانة الوقائية والفجائية ... الخ.

13.10 مسائل:

1- عرف المحاكاة.

2- أصف الفوائد المهمة لنظام المحاكاة.

3- باختصار أشرح أنواع المحاكاة في المصانع الإنتاجية.

4- ذكر وأصف ٤ محطات داخل المصانع يمكن استخدام المحاكاة كأداة مفيدة واقتصادية.

5- أف باختصار استخدام طريقة المونتي كارو للمحاكاة.

6- إذا كانت الطلبية اليومية من منتج ما تخضع إلى كثافة الدالة الاحتمالية التالية:

الطلبية	0	1	2	3
الاحتمال	0.2	0.3	0.4	0.1

باستخدام جداول الأرقام العشوائية. أحسب الطلبية اللازمة لمدة ٥ أيام مستقبلية على الأقل.

7- إذا كان زمن إعداد الطلبية خلال فترة يوم أو يومان فقط، وفقا للاحتمالات المرافقة. فإن الطلبية الموازية هي:

الطلبية	0	1	2
الاحتمال	0.2	0.5	0.3

استخدم جداول الأرقام العشوائية لتنبؤ الطلبية وزمن إعداد الطلبية.

8- أوجد القيمة التقديرية باستخدام التكامل للحصول على أول ٣٠ رقم عشوائي في جداول الأرقام العشوائية $\int_0^1 x^2dx$

(ملاحظة: التكامل لـ x^2 في فترة مغلقة $0 \leq x \leq 1$)

9- كرر المسألة رقم (9) إذا علمت أن $3 \leq x \leq 5$.

10- الجدول التالي يوضح مقدار التغيير في عدد الزبائن في خط الانتظار مع العلم بزمن المحاكاة، أحسب:

أ - نسبة الزمن إن محطة التشغيل فارغة.

ب- متوسط زمن الانتظار للزبون إذا فرضنا أن مجموع الواصلين 30.

ج- عدد المنتظرين في خط الانتظار.

زمن المحاكاة t الساعة	عدد الزبائن المنتظرين
$0 \leq t \leq 3$	0
$3 \leq t \leq 4$	1
$4 \leq t \leq 6$	2
$6 \leq t \leq 7$	1
$7 \leq t \leq 10$	0
$10 \leq t \leq 12$	2
$12 \leq t \leq 18$	4
$18 \leq t \leq 20$	1
$20 \leq t \leq 25$	0

11- إذا كان زمن إعداد الطبية في نظام التحكم في المخزون لمركز توزيع في أحدى المدن المتوسطة في الجماهيرية العظمي يساوى ١ ، ٢ أو 3 أسابيع وفقا للاحتمالات المصاحبة في الجدول التالي:

زمن أعداد الطلبية	نسبة الاحتمال
١	٠,٣٥
٢	٠,٤٠
٣	٠,٢٥

استخدم نظم المحاكاة في تحديد كمية الطلبية التي تحدث لأي مركز توزيع لعدد 20 زمن للإعداد للطلبية - استخدم الاستهلاك الأسبوعي، أستخدم رقمين عشريين عشوائية.

الفصل الرابع عشر

نظرية المباريات

يناقش هذا الفصل مفهوم نظرية المباريات وتطبيقاتها في اتخاذ القرارات لتحقيق أكبر ربح ممكن وأقل خسارة ممكنة.

الفصل الرابع عشر

١٤

نظرية المباريات

Game Theory

١٤,١ مقدمة:

تفيد نظرية المباريات (Game theory) متخذ القرار الذي يواجه عند اتخاذه للقرار في وجود أطراف متنافسة. أي أن نظرية المباريات تفيد في اتخاذ القرارات في المواقف التي تقسم بتعارض المصالح (عند أي مستوى إداري) والتي يتحدد فيها اختيار متخذ القرار البديل بناء على المواقف المحتملة التي يمكن أن يتخذها المنافس الذي له نفس الظروف.

في نظرية المباريات يشار للخصم (Opponent) باللاعب (Player) وكل لاعب له عدة خيارات محدودة وغير محدودة تسمى إستراتيجية (Strategies) . والمخرجات من المباراة يمكن تلخيصها في دوال لعدة استراتيجيات لكل لاعب.

فمثلا مباراة من لاعبين حيث انتصار أي لاعب وفائدته يقدر بخسارة الطرف الثاني. وتسمى المجموع الصغرى لاعبين متقابلين (Tw0-Person zero-Sum game).

وتتكون أي مباراة من مجموعة من العناصر أهمها ما يلي:

- القوانين والإجراءات التي تحكم المباراة.
- اللاعبون أو متخذي القرارات (المتنافسون).
- إستراتيجية (أو استراتيجيات) كل طرف من أطراف المباراة.
- المعلومات والعوامل والإمكانيات المتاحة لكل طرف قبل وأثناء المباراة.

هذا ويمكن تقسيم المباراة من حيث عدد أطرافها إلى مباريات ثنائية ومباريات غير ثنائية (متعددة الأطراف) مما يمكن تقسيمها من حيث نتيجة المباراة إلى مباريات صفرية وأخرى غير صفرية، ولتوضيح هذا التعريف باستخدام المثال التالي:

مثال 14.1:

لتوضيح المباريات الثنائية الصفرية باعتبار استخدام رمي النقود المعدنية والتي أحد المتنافسين يختار أي وجه، فإذا كان اللاعبين t ، ب يختاران (H) ، (T) على التوالي (Head) H ، T (Tail).

فإن النتيجة إما H ، H أو T ، T فإن اللاعب H يربح دينارا من اللاعب ب والعكس صحيح.

وفي هذه الحالة توجد استراتيجيان (H ، T) والذي يعطي مصفوفة من نوع 2 ×2 ويمكن تمثيلها على النحو الأتي:

		اللاعب B	
		H	T
اللاعب أ	H	1	-1
	T	-1	1

الحل الأمثل (Optimum) لهذا النوع من المباريات يستلزم من كل لاعب ليلعب باستراتيجية صافية (H ، T) أو إستراتيجية مخلوطة.

14.2 الحل الأمثل للمباريات الثنائية ذات المحصلة الصفرية:

(Optimal solution of two - person zero - sum games)

تعمد مواصفات الحل لمسائل اتخاذ القرار على مدى توفر المعلومات عن المشكلة. نظرية المباريات تمثل حل للمسائل التي غالبا ما تكون فيها المعلومات محدودة ومتعارضة وينتج عنها عرض لحل مسألة خصمين محصلة نتائجهما صفر.

ولإثبات حالة أن كل لاعب يرغب في تحقيق أهدافه على حساب الثناني لابد من نظرية تحقق - الأدنى - الأعظم أو الأعظم والأدنى (Minmax - Maxmin) ولتوضيح هذه الظاهرة تستدل بالمثال التالي:

مثال 14.1:

إذا اعتبرنا المصفوفة التالية والتي تمثل لاعبين A ، B وطريقة حسابات Minmax على النحو الآتي:

اللاعب B

		1	2	3	4	صف الأدنى	
اللاعب A	1	8	2	9	5	2	
	2	6	5	7	18	5	الأعظم
	3	7	3	-4	10	-4	
عمود الأعظم		8	5	9	18		

الأدنى الأعظم

فعندنا اللاعب يلعب وفق الخطة الأولى فإنه يمكن أن يربح 5 أو 9 ، 2 ، 8 وهذا يعتمد على اختيار خط اللاعب B.

ويمكن أن يضمن على الأقل الآتي:

Min [8 , 2 , 9 , 5]

على الرغم من الخطة التي يختارها اللاعب B.

وبالمثل إذا لاعب اللاعب A وفق الخطة الثانية فإنه يضمن أن يربح على الأقل الآتي:

Min [6 , 5 , 7 , 18] = 5

وإذا لاعب اللاعب A وفق الخطة الثالثة فإنه يضمن أن يربح على الأقل التالي.

Min [7 , 3 , -4 , 10] = -4

وهذا يعني أن أقل قيم يمكن أن يربحها اللاعب في الصفوف هي أقل قيم ممكنة.

عليه فإنه اللاعب A سوف يختار الخطة الثانية والتي تحقق له أكبر ربح في أقل قيمة متاحة له. وهذا الربح يمكن أن يختار وفق للآتي:

Min [2 , 5 , -4] = 5

ويسمى اختيار اللاعب A بخطة (Maxmin) أو أقل قيمة في المباراة.

ومن جهة أخرى فإن اللاعب B يسعى لتحقيق أقل خسارة ممكنة فإذا اختار الخطة الأولى فسوف يتحقق أقل خسارة ممكنة على النحو الآتي:

Min [8 , 6 , 7] = 8

ويمكن تطبيق نفس الطريقة بالنسبة إلى باقي الخطط الثلاثة فإن النتيجة لكل الخطط هي:

Min [8 , 5 , 9 , 18] = 5

ويعتبر اختيار اللاعب B يسمى بالخطة (Minmax) أو اكبر قيمة في المباراة.

ووفقا للنتائج المتحصل عليها بالنسبة للاعب A، واللاعب B نلاحظ أن:

Minmax value = Maximin value

(5) = (5)

ويسمى هذا الحل الأمثل وإذا تلاقى الاثنان عند نقطة واحدة تسمى نقطة التلاقي Szddle point وتكون الاستراتيجية في نقطة واحدة. أي لم توجد نقطة تلاقي تتكون الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية مختلطة (Mixed).

وبصفة عامة وتحدد قيمة المباراة بشرط تحقيق الشرط التالي:

Maximin value $\leq$ Value of the game $\leq$ Minimax value

14.3 الخطط المختلطة (Mixed strategies):

في بعض المباريات قد تكون هناك نقطة تلاقي وبالتالي لا تكون هناك استراتيجية مطلقة وتعتبر الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية مختلطة، أي كل متنافس سوف يختار صف من صفوفه. ولتوضيح الفكرة؛

مثال 14.2:

اللاعب B

		1	2	3	4	صف القيم الصغرى	
اللاعب A	1	5	-10	9	0	-10	
	2	6	7	8	1	1	
	3	8	7	15	2	2	القيم
عمود القيم	4	3	4	-1	4	-1	العظمى
العظمى	8	7	15	4			
				↑ أصغر قيمة عظمى			

فإن أصغر قيمة عظمى (Minimax = 4 وهي أكبر من أعظم قيمة صغرى (Maximin = 2.

∴ هذه المباراة لا توجد فيها نقطة تلاقي - كذلك الاستراتيجية المطلقة ليست ذات حل أمثل (Optmal).

وهذا يعني أن اللاعب يمكن أن يحسن من نتيجة باختيار خطط مختلفة. وفي هذه الحالة تعتبر المباراة غير عادلة.

ويمكن معالجة هذه الحالة باستخدام نظرية الاحتمالات. فمثلا لو فرضنا أن:

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_m$$

و

$$y_1 , y_2 , y_3 , \ldots\ldots , y_m$$

تمثل الصفوف والأعمدة بالنسبة للاعبين A، B والتي تمثل الخطوط المطلقة. عليه:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

لكل (j, i) $\quad x_i , y_i \geq 0$

∴ فإذا كان a_{ij} تمثل (i ، j) دخول إلى المباراة، x_j ، y_i سوف تظهر على شكل المصفوفة التالية:

		B			
		y_1	y_2	…..	y_n
	x_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1n}
A	x_2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	x_m	a_{m1}	a_{m2}	…..	a_{mn}

ويحل هذا النوع من المسائل ذات الخطة المختلطة وفقا لمواصفات المستخدمة في Minimax.

ويعتبر الفرق الوحيد هو اختيار x_i للاعب A التي تحقق تعظيم أقل خسارة ممكنة في العمود وأن B تختار بواسطة y_i والتي تحقق تصغير أكبر ربح ممكن في الصف.

ويمكن التعبير عن هذه المفاهيم رياضيا على النحو الآتي:

$$\text{Max}\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_{i1} \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i , \ldots\ldots\ldots\ldots , \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i\right)\right\}$$

حيث اللاعب A يختار $x_i \begin{bmatrix} (x_i \geq 0) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \end{bmatrix}$

واللاعب B يختار $y_i \left(yi \geq \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j = 1 \right)$

$$\text{Min}\left\{ \text{Max}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_i \right) \right\}$$

فإن:

Minimax Exp. Payoff $\geq$ Maximin exp. Payoff

فإذا كان x^*I ، y^*I تمثل قيم الحل الأمثل

فإن القيمة المتوقعة للمباراة تساوي:

$$y^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j x^* i y^*$$

وتوجد عدة طرق لحل هذه المسألة منها ما يلي:

14.4 طريقة حل مسائل الخطة المختلطة (2 x n) ، (m x 2):

بواسطة الرسم البياني [Graphical solution of (2 x n) (m x 2) Games]

B

		y_1	y_2	…..	y_n
A	x_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1n}
	$x_2 = 1 - x_1$	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2n}

وبافتراض أن المباراة لا توجد فيها نقطة تلاقي.

وبما أن A لها خطتان والتي تتبع

$$y_2 = 1 - x_1,\ \ x_1 \geq 0\ ,\ \ x_2 \geq 0$$

فإن الربح المتوقع والمقابل للخطة المطلقة B يمكن حسابه على النحو الآتي:

خطة B's	الربح المتوقع لـ A's
1	$(a_{11} - a_{21})\ x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\ x_1 + a_{22}$
⋮	⋮
n	$(a_{1n} - a_{2n})\ x_1 + a_{2n}$

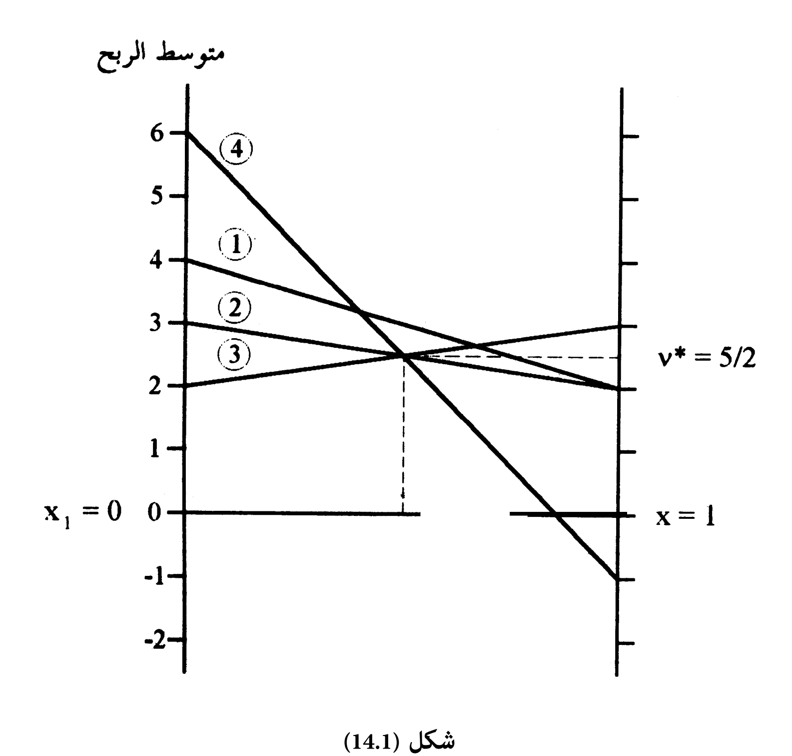
مثال 14.3:

		B			
		1	2	3	4
A	١	1	2	3	-1
	2	4	3	2	2

هذه المباراة لا تحتوي على نقطة تلاقي. ومتوقع أن للاعب A سوف يربح اللاعب B مطلقة وفق للآتي:

توقع الربح لـ A	خطة B المطلقة
$-2\ x_1 + 4$	1
$-\ x_1 + 3$	2
$x_1 + 2$	3
$-7x_1 + 6$	4

وهذه المعادلات الخطية موضحة بالشكل (14.1) كدالة في x_1.



شكل (14.1)

حيث نقطة العظمى الصغرى Maximin تحدث عند * وهذه النقطة مقلوبة من تقاطع المعادلات 2 ، 3 ، 4 وأن الخطة المثلي تحقق عند ( )*

وقيمة المباراة تعطي:

$$y^* = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2}+3 & = 5/2 \\ \frac{1}{2}+2 & = 5/2 \\ -> \left(\frac{1}{2}\right)-6 & = 5/2 \end{array} \right\}$$

ولحساب الخطة المثلي للاعب B تلاحظ أن ثلاث خطوط مرت بالنقطة العظمى الصغرى (Maximin). وهذا يعطي انطباع أن B يمكن أن تخلط 3 خطط. حيث أن أي خطين يعطي إشارة معاكسة بالنسبة لميولهن ومنها يمكن أن تحصل على حلول مشابهة مثلي.

فمثلا: إذا أخذنا التركيبات (2،3) أو (4، 2) أو (4، 3) يمكن معرفة أن التكوينية (2،4) لا تكون حالي مثالي.

أما التكوينية (2،3) تؤدي إلى = $y_1^* \; y_4^*$

وكذلك $y_3 = 1 - y_2$ وأن متوسط ربح اللاعب B والمقابل للاعب A يمكن حسابها على النحو الآتي:

خطة A المطلقة	توقع الربح لـ B
1	$- y_2 + 3$
2	$y_2 + 3$

∴ y_2 (المقابلة للنقطة الصغرى العظمى (Minimax) يمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$y_2^* + 3 = y_2^* + 2$$

وهذا يعطي:

$$y_2^* = 1/2$$

مع ملاحظة أن

$$y_2 = 1/2$$

وأن قيمة الربح المتوقعة B تكون 5/2

أما التكوينة الباقية (3،4) يمكن معاملتها بالتشابه كحل أمثل موازي.

مثال 14.4:

إذا أعطيت المصفوفة التالية بمقياس مباراة (2 × 4).

		B 1	B 2
A	١	2	4
	2	2	3
	3	3	2
	4	-2	6

فإن هذه المباراة لا توجد لها نقطة تلاقي (Snddle point).

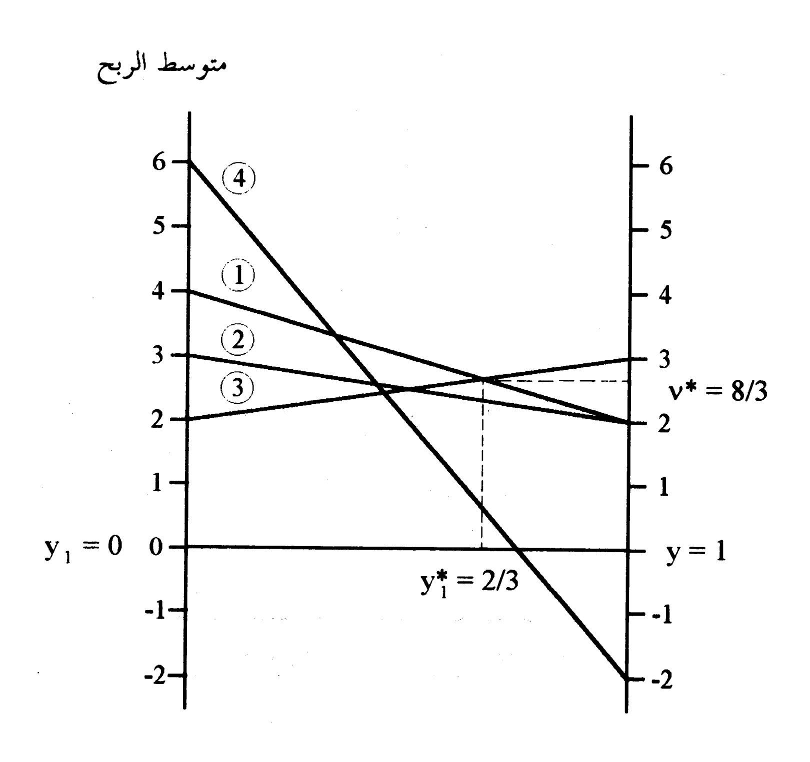
فمثلا إذا فرضنا y_2 ، y_1 $(= 1 , -y_1)$ فإن الخطة B تعتبر خطة مخلطة.

∴

خطة A المطلقة	الربح المتوقع لـ B
1	$-2 x_1 + 4$
2	$- x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-8x_1 + 6$

فلو طبقا قاعدة الرسم البياني التمثيلي للمعادلات الأربعة فإن نقطة القيم العظمي للصغرى (Minimax point) يمكن حسابها كأقل نقطة للأعلى الغلاف.

فإن قيمة y_1^* يمكن استخلاصها بواسطة نقطة التقاطع للخطوط (1) ، (3) في الشكل (11.2) ويعطي $y_1^* = 2/3$ ، $y^* = 8/3$



شكل (14.2)

حيث أن تقاطع الخطوط عند نقطة العظمى الصغرى مقابل الخطة المطلقة للاعب (1) & (3) A. وهذا يعطي:

$$y_2^* = 0 \qquad\qquad y_4^* = 0$$

وبالتسلسل $x_1 = 1 - x_3$ وأن متوسط الربح للاعب A مقابل B للخطة المطلقة الحرة هو:

الربح المتوقع لـ B	خطة A المطلقة
$-x_1 + 3$	1
$2\,x_1 + 2$	2

والنقطة x_1 يمكن حسابها وفق المعادلة التالية:

$$-x_1^* + 3 = 2x_1^* + 2$$

وهذا يعطي

$$x_1^* = \frac{1}{3}$$

وأن الخطة المثلي تكون لـ A على النحو الآتي:

$$x_1^* = \frac{1}{3}$$
$$x_2^* = 0$$
$$x_2^* = \frac{2}{3}$$
$$x_3^* = 0$$
$$V^* = \frac{8}{3}$$

14.5 حل المباريات (Mxn) بواسطة البرمجة الخطية

(Solution of (Mxn) Games by Linear programming)

توجد علاقة قوية ما بين نظرية المباريات والبرمجة الخطية منذ صياغة مسألة tow-person zero - sum games في صورة مسألة برمجة خطية - وأن أي مسألة برمجية خطية يمكن اعتبارها كمسألة مباريات. وفي الحقيقة قام الباحث [G. Dantzing (1963)] بالتطرق إلى نظرية المباريات عند ظهر علم حل المسائل البرمجية الخطية (السمبلكس) في (1947) وكذلك تطرقت نظرية الثنائية في البرمجة الخطية إلى هذه العلاقة أيضا.

هذا الجزء يوضح حل مسائل المباريات باستخدام البرمجة الخطية وخاصة التي تحتو يمنها على عدد كبير في محتوى المصفوفات والتي تأخذ وقت طويل لحلها. فمثلا: إذا أشرنا إلى العلاقة التي توضح الخطة المختلطة المثلى:

$$\underset{x_i}{\text{Max}}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i\ ,\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,..........,\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad i= 1, 2, ..., m$$

هذه المسألة يمكن وضعها وإعادة صياغتها في صورة مسألة برمجة خطية وذلك على النحو الآتي: د

ع

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_1\ \ ,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,..........,\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

فتصبح المسألة:

تعظيم Maximize $z = v$

تحت شروط (S. T)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i \geq v \qquad\qquad j=1,2,.............,n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad\qquad x_i \geq 0 \ \text{(لكل i)}$$

v تمثل قيمة المباراة في هذه الحالة.

ويمكن تبسيط مسألة البرمجة بقسمة كل المعادلات (n+1) و (v) وهذا التقسيم صحيح مادام قيمة $v > 0$.

أما إذا كانت قيمة $v < 0$ فإن رمز المعادلة $\begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix}$ تعكس وفقا لقواعد البرمجة الخطية.

أما إذا كانت $v = 0$ فلا تجوز القسمة.

وبصفة عامة إذا كانت قيمة Maximin موجبة هذا يحقق عدم وجود نقطة تلاقي.

∴ إذا فرضنا أن v = 0 فإن قيود مسألة البرمجة الخطية تكون على النحو الآتي:

$$a_{11}\frac{x_1}{V}+a_{21}\frac{x_2}{V}+.............+a_{m1}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

$$a_{21}\frac{x_1}{V}+a_{22}\frac{x_2}{V}+.............+a_{m2}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\frac{x_1}{V}+a_{2n}\frac{x_2}{V}+.............+a_{mn}\frac{x_m}{V}\geq 1$$

$$\frac{x_1}{V}+\frac{x_2}{V}+.............+\frac{x_m}{V}=\frac{1}{V}$$

فإذا قلنا أن $x_1 = x_2 / V$ $\quad I = 1, 2, ….., m$

فإن:

$$\text{Max} \quad V=\min\frac{1}{V}=\text{Min}[x_1+....+x_m]$$

وتصبح المسألة على الشكل الآتي:

Minimize $\quad z = x_1 + x_2 + …… + x_m$

S, T.

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_2+……+a_{m1}x_m \geq 1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+……+a_{m2}x_m \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+……+a_{mn}x_m \geq 1$$

$$x_1 , x_2 , ……+ x_m \geq 0$$

أما اللاعب B يمكن أن تعطي العلاقة على النحو الآتي:

$$\underset{y_i}{\text{Max}}\left\{\max n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i1} y_i , \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_i ,.........., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_i\right)\right\}$$

S.T.

$$y_1 + y_2 + \dots\dots\dots + y_m = 1$$

$$y_1 \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

ويمكن عرضها بواسطة البرمجة الخطية على النحو الآتي:

تعظيم Maximize $w = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$

تحت شروط (S. T)

$$\begin{aligned} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n &\leq 1 \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n &\leq 1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}\gamma_1 + a_{2m}\gamma_2 + ... + a_{mn}\gamma_n &\leq 1 \\ \gamma_1 , \gamma_2 + ... + \gamma_n &\geq 0 \end{aligned}$$

حيث $w = \frac{1}{V}$

$$\gamma_1 = \frac{y_i}{V} \qquad j = 1,2,............., n$$

مع ملاحظة أن اللاعب B يعتبر ثنائي (Dual) للاعب A. وهذا يعني أن الحصول على الأمثل للاعب B يعطي أتوماتيكيا حل أمثل للاعب B.

اللاعب B يجب أن يحمل على أنه مسألة برمجة خطية عادية بطريقة السمبلكس أو اللاعب A يعامل على أن حل مسألة سمبلكس ثنائي. واختيار الحل بأحد الطريقتين يعتمد على عدد القيود أو عدد الخطط.

مثال 14.5:

إذا أعطيت المصفوفة التالية (3 × 3)

		B			
		1	2	3	صفة القيم الصغرى
A	1	3	-1	-3	-3
	2	-3	3	-1	-3
	3	-4	-3	3	-4
	عمود القيم الكبرى	3	3	3	

وبما أن القيمة العظمى (3-) فهذا من المستحيل أن تكون قيمة المباراة (-) أو (0).

فإن الثابت k يجب أن يكون على الأقل سالب بالنسبة للقيمة العظمى ويضاف إلى كل عناصر المصفوفة

$$K \geq 3$$

فإذا فرضنا أن $K = 5$ فإن المصفوفة أعلاه تصبح

		B		
		1	2	3
A	1	8	4	2
	2	2	8	4
	3	1	2	8

فإن مسألة البرمجة الخطية للاعب B يمكن تعطي بالآتي:

$$\text{Maximize} \quad W = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

S. T.

$$8y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1$$
$$2y_1 + 8y_2 + 4y_3 \le 1$$
$$1y_1 + 2y_2 + 8y_3 \le 1$$
$$y_1 ,\ \ y_2 ,\ \ y_3 \ \ge 0$$

وأن جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	الحل
W	0	0	0	$\frac{5}{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{45}{196}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{14}$	0	$\frac{1}{14}$
y_2	0	1	0	$\frac{-3}{98}$	$\frac{31}{196}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{11}{196}$
y_3	0	0	$\boxed{1}$	$\frac{-1}{98}$	$\frac{-3}{98}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{49}$

والحل للمسألة الأصلية:

$$v^* = \frac{1}{w} = K = \frac{196}{45} - 5 = \frac{29}{45}$$
$$y_1^* = \frac{y_1}{w} = \frac{1/14}{45/196} = \frac{14}{45}$$
$$y_2^* = \frac{y_2}{w} = \frac{11/196}{45/196} = \frac{11}{45}$$
$$y_3^* = \frac{y_3}{w} = \frac{5/49}{45/196} = \frac{20}{45}$$

وأن الخطة المثالية بالنسبة لـ A يمكن الحصول عليها من الحل الثنائي للمسألة أعلاه والتي يعطي على النحو الآتي:

$z = w = 45/196$

$x_1 = 5/49 \qquad x_2 = 11/196 \qquad x_3 = 1/14$

$$x_1^* = \frac{x_1}{z} = \frac{20}{45}$$

$$x_2^* = \frac{x_2}{z} = \frac{11}{45}$$

$$x_3^* = \frac{x_3}{z} = \frac{14}{45}$$

14.6 مسائل:

1- أوجد نقطة التلاقي (Saddle point) وكذلك قيمة المباراة لكل من المباريات الآتية. والربح الذي يحصل عليه اللاعب A.

	B			
A	4	-4	-5	6
	-3	-4	-9	-2
	6	7	-8	-9
	7	3	-9	5

	B			
A	8	6	2	8
	8	9	4	5
	7	5	3	5

-2 أذكر قيمة المباريات التالية التي لها قيمة أكبر من أو أقل من أو تساوي صفر.

B

	1	9	6	0
A	2	3	8	4
	-5	-2	10	-3
	7	4	-2	-5

B

	3	7	-1	3
A	4	8	0	-6
	6	-9	-2	4

B

	-1	9	6	8
A	-2	10	4	6
	5	3	0	7
	7	-2	8	4

B

	3	6	1
A	5	2	3
	4	2	-5

3- إذا اعتبرنا المباراة التالية:

		B 1	2	3
	1	5	50	50
A	2	1	1	0.1
	3	10	1	10

اثبت أن الخطط $\left(\frac{5}{6},0,\frac{1}{6}\right)$ بالنسبة للاعب A وأن $\left(0,\frac{5}{54},\frac{49}{54}\right)$ بالنسبة للاعب B تكون الحل الأمثل. وأوجد قيم هذه المباريات.

4- أوجد حل المباريات التالية بواسطة طريقة الرسم البياني:

أ-

	B			
	1	3	-3	7
A	2	5	4	-6

ب-

	B	
	1	2
A	5	6
	-7	9
	-4	-3
	2	1

ج-

		B	
	1	2	5
A	8	4	7
	-1	5	-6

5- حل المباريات التالية بطريقة البرمجة الخطية:

أ-

		B	
	-1	1	1
A	2	-2	2
	3	3	3

ب-

		B		
	1	2	-5	3
A	-1	4	7	2
	5	-1	1	9

الفصل الخامس عشر

برمجة الأهداف المتعددة

ركز هذا الفصل على التعريف بالأهداف المتعددة لدالة الهدف وكيفية صياغة هذا النوع من المشاكل والذي يحتاج إلى فهم أكثر لمعطيات المسائل ووضعها في أنماط خطية والتي يمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس الجبرية.

الفصل الخامس عشر

١5

برمجة الأهداف المتعددة

Goal Programming

15.1 مقدمة:

في مجالات الحياة التطبيقية المهمة في اتخاذ القرارات يتعذر أحيانا أن تحقق كل الأهداف المرجوة وتحقق كل القيود المحيطة أو المتاحة، وهذا يلزمنا بأن نختار هدف واحد مثال تحقيق أعظم ربح ممكن أو أقل تكاليف ممكنة، ولكن أحيانا يتطلب الأمر إلى أن تحقق أكثر من هدف في مؤسسة صناعية أينا مثال تحقيق أعظم ربح ممكن مع المحافظة على الطاقة البشرية وتقليل زيادة الأسعار ... الخ.

برمجة الأهداف Goal Programming يعتبر امتداد للبرمجة الخطية مع احتوائه على نفس دالة الهدف ومع احتوائه على أهداف متعددة. وعند صياغة مسألة برمجة الأهداف، يجب أن تعرف المتغيرات الأساسية $x_1 , x_2 \dots x_n$ تم تحديد الإدارة أهمية هذه المتغيرات.

إن برمجة الأهداف عبارة عن البرمجة الخطية مع خاصية الحصول على تحقيق أكثر من هدف آنيا حتى ولو كانت هذه الأهداف أحيانا متكاملة، وذلك بوضع هدف لكل متغير لإمكانية الوصول إليه.

15.2 برمجة الأهداف المتعددة

استخدمت لأول مرة بواسطة Chares, Cooper and Ferguson in 1955 وأن أول تطبيق هندسي لبرمجة الأهداف Ignicio by (1962).

مثال (1):

مصنع ينتج نوعان من المنتوجات: هيكل جهاز الحاسوب وصندوق حمل الاسطوانات، ويرغب المصنع في اتخاذ قرار إما الاستمرار في إنتاج هيكل الحاسوب أو صندوق الاسطوانات، حيث أن إنتاج أحد المنتوجين يستغرق ساعة إنتاجية وأن الزمن المتاح للإنتاج 10 ساعات يوميا، فإن عدد أجهزة الحاسوب التي يمكن بيعها يوميا 6 عدد صناديق حمل الاسطوانات 8 في اليوم، وسعر البيع 80 د.ل للأول و 40 د.ل للثاني. الساعات الإضافية المسموح بها يوميا 2 ساعة في اليوم، ومبرر الإنتاج يرغب في تحقيق الأهداف الآتية:

1- لا يرغب في تخفيض ساعات الإنتاج اليومية وفق الطاقة التصميمية لخط الإنتاج.
2- لا يرغب في زيادة الساعات الإضافية.
3- يرغب في بيع أكثر عدد من المنتجين.
4- يرغب في تصغير الوقت الإضافي إلى الحد الأدنى.

المطلوب: صياغة المسألة ببرمجة الأهداف.

الحل:

الشركة تنتج عدد 2 منتج x_1 ، x_2.

الزمن اللازم لإنتاج هيكل جهاز الحاسوب = ساعة واحدة.

الزمن اللازم لإنتاج صندوق حمل الاسطوانات = ساعة واحدة.

الزمن المتاح للإنتاج يوميا = 10 ساعات.

حجم المبيعات المتوقع $x_1 = 6$.

حجم المبيعات المتوقع $x_2 = 8$.

ثمن بيع هيكل جهاز الحاسوب = 80 د.ل.

ثمن بيع صندوق حمل الاسطوانات = 40 د.ل.

x_1 هيكل جهاز الحاسوب.

x_2 صندوق حمل الاسطوانات.

قيود المسألة:

1- **قيد زمن الإنتاج المتاح:**

$$x_1 + x_2 + d_2^{-1} - d_1^{+1} = 10$$

حيث: $d_{1-}^{-} =$ الزمن الذي لم يتم استخدامه من زمن الإنتاج المتاح يوميا.

$d_{1+}^{+} =$ الزمن الذي يمكن استخدامه فوق زمن الإنتاج المتاح يوميا.

2- **قيد المبيعات:**

$$x_1 + d_2^{-} = 6$$

$$x_2 + d_3^{-} = 8$$

حيث: $d_2^{-} =$ كمية المبيعات التي لا تحقق في x_1.

$d_3^{-} =$ كمية المبيعات التي لا تحقق في x_2.

3- **الزمن الإضافي:**

$$d_1^{+} + d_4^{-} - d_4^{+} = 2$$

حيث: $d_4^{-} =$ الزمن الغير مطلوب من الزمن الإضافي المتاح.

$d_4^{+} =$ الزمن المطلوب أكثر من الزمن الإضافي المتاح.

إذ يمكن صياغة نمط برمجة الأهداف على النحو التالي:

$$\text{Minimize} \quad z = P_1 d_1^{-} + P_2 d_4^{+} + (2P_3 d_2^{-} + P_3 d_3^{-}) + P_4 + d_1^{+}$$

S.T

$$x_1 + x_2 + d_1^{-} - d_1^{+} = 10$$
$$x_1 + d_2^{-} = 6$$
$$x_2 + d_3^{-} = 8$$
$$d_4^{+} - d_4^{-} - d_4^{+} = 2$$

مع مراعاة الآتي: $x_1 , x_2 , d_1^{-} , d_1^{+} , d_2^{-} , d_3^{-} , d_4^{-} , d_4^{+} \geq 0$

وأن P_1، P_2، P_3، P_4 هي مستويات الأفضلية بداية من الأحسن إلى الأسوأ.

وأن $P_1\,d_1^-$ هو الهدف الأول

$P_2\,d_4^-$ هو الهدف الثاني.

$(2P_3\,d_2^- + P_3\,d_3^-)$ هو الهدف الثالث.

$P_4\,d_1^+$ هو الهدف الرابع.

مثال (2):

مدير إنتاج في مصنع ما واجه بعض المشاكل في تخصيص أعمال لفريقي الإنتاج في المصنع حيث أن نسبة الإنتاج للفريق الأول 8 وحدات/ الساعة، ونسبة الإنتاج للفريق الثاني 5 وحدات/ الساعة وأن ساعات العمل المتاحة لكل فريق 40 ساعة/ أسبوعيا، ويرغب مدير الإنتاج في اختياراته لتحقيق الأهداف التالية:

1- $P_1 =$ لا يرغب في أن يحقق مستوى الإنتاج عن 550 وحدة.

2- $P_2 =$ الزمن الإضافي للفريق الأول لا يزيد عن 5 ساعات.

3- $P_3 =$ الزمن الإضافي للفريقين يجب أن يكون في الحد الأدنى.

4- $P_4 =$ لا يسمح بأي إخفاقات في تحقيق الإنتاج المرغوب في الزمن العادي المتاح للإنتاج ويمكن يخضع ذلك لحسابات الإنتاجية.

المطلوب: صياغة المسألة ببرمجة الأهداف.

الحل:

x_1 زمن الإنتاج للفريق الأول أسبوعيا.

x_2 زمن الإنتاج للفريق الثاني أسبوعيا.

نسبة الإنتاج للفريق الأول 8 وحدات/ الساعة.

نسبة الإنتاج للفريق الثاني 5 وحدات/ الساعة.

الزمن المتاح بالإنتاج لكل فريق 40 ساعة/ أسبوعيا.

1- قيد حجم الإنتاج:

$$8x_1 + 2x_2 + d_1^{-1} - d_1^{+} = 550$$

حيث: d_{1-}^{-} الإنتاج غير المحقق من الإنتاج المستهدف.

d_{2+} الإنتاج المحقق من الإنتاج المستهدف.

2- قيد زمن الإنتاج للفريقين:

$$x_1 + d_2^{-} - d_2^{+} = 40$$

حيث d_2^{+} ، d_2^{-} الزمن الناقص والزائد من زمن الإنتاج المحدد أسبوعيا للفريق الأول.

$$x_2 + d_3^{-} - d_3^{+} = 40$$

حيث d_3^{+} ، d_3^{-} الزمن الناقص والزمن الزائد عن الزمن المحدد للزمن الإضافي أسبوعيا.

وبهذا تكون صياغة المسألة ببرمجة الأهداف:

$$\text{Minimize} \quad z = P_1 d_1^{-} + P_2 d_4^{+} + (P_3 d_2^{+} + P_3 d_3^{+}) + (8P_4 d_2^{-} + 5P_4 d_3^{-})$$

S.T

$$8x_1 + 5x_2 + d_1^{-} - d_1^{+} = 550$$
$$x_1 + d_2^{-} - d_2^{+} = 40$$
$$x_2 + d_3^{-} - d_3^{+} = 40$$
$$d_2^{+} + d_4^{-} - d_4^{+} = 5$$
$$x_1,\ x_2,\ d_1^{-},\ d_1^{+},\ d_2^{-},\ d_3^{-},\ d_4^{-},\ d_4^{+} \geq 0$$

وأن:

$P_1 d_1^{-}$	Goal 1
$P_2 d_4^{-}$	Goal 2
$P_1 d_1^{-}$	Goal 3
$P_2 d_4^{-}$	Goal 4

15.3 طريقة حل برمجة الأهداف المتعددة بواسطة طريقة السمبلكس:

Simplex Method To Solving Programming

يمكن استخدام طريقة السمبلكس التي نوقشت في الفصل الخامس لحل مماثل لبرمجة الأهداف يعد إضافة بعض التطويرات عليها والتي يمكن إبرازها على النحو الآتي:

1- تصفير الجزء الذي لم يحقق الهدف إلى الحد الأدنى، والذي يمكن الحصول عليه بتصفير d_5 أو الميول عن الهدف. ويمكن تمثيله بقيم زCj في الجدول التالي.

2- Zj زCj لا يمكن إبرازها في صف واحد وتصبح جداول السمبلكس في صور ة مصفوفة حجمها (mxin) حيث imperative factors

(number of decision variables + number of deviational variables)

مثال (3):

ابعد حل المسألة التالية:

$$\text{Minimize} \quad z = P_1 d_1^- + P_2 d_4^+ + (2P_3 d_2^- + P_3 d_3^-) + P_4 d_3^+$$

S.T

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 10$$
$$x_1 + d_2^- = 6$$
$$x_2 + d_3^- = 8$$
$$d_4^+ + d_4^- - d_4^+ = 2$$

$$x_1 ,\ x_2 ,\ d_1^- ,\ d_1^+ ,\ d_2^- ,\ d_3^- ,\ d_4^- ,\ d_4^+ \geq 0$$

في المعادلات السابقة x_1، x_2 تعتبر المتغيرات الأساسية لاتخاذ القرار وباقي المتغيرات تعتبر متغيرات ثانوية تؤثر بميول في اتخاذ القرار.

والجدول 15.1 يوضح الحل الابتدائي.

Table 15.1 Initial Table

	C_j	0	0	P_1	$2P_3$	P_3	0	P_4	P_2		
CB_i	Basic variable	x_1	x_2	d_{1-}^{-}	d_{2-}^{-}	d_{3-}^{-}	d_{4-}^{-}	d_{1-}^{+}	d_4^{+}	Solution	Ratio
P_1	d_{1-}	1	1	1	0	0	0	-1	0	10	10
$2P_3$	d_{2-}	1	0	0	1	0	0	0	0	6	6
P_3	d_{3-}	0	1	0	0	1	0	0	0	8	-
0	d_{4-}	0	0	0	0	0	1	1	-1	2	-
Cj-Zj	p_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	p_3	-2	-1	0	0	0	0	0	0	20	
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	p_1	-1**	-1	0	0	0	0	1	0	10	

* Key row ** column

حيث Cj - Z j تكونت على النحو الآتي:

The computation of the values for the criterion matrix is:

$C_1 - Z_1 = 0 - (p_1 + 2p_3) = - p_1 - 2p_3$

$C_2 - Z_2 = 0 - (p_1 + p_3) = - p_1 - p_3$

$C_3 - Z_3 = p_1 + p_1 = 0$

$C_4 - Z_4 = 2p_3 - 2p_3 = 0$

$C_5 - Z_5 = p_3 - p_3 = 0$

$C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$

$C_7 - Z_7 = p_4 - (-p_1) = p_4 + p_1$

$C_8 - Z_8 = p_2 - 0 = p_2$

وتكون مؤثرات العمود على النحو الآتي: $10\ p_1 + 20\ p_3$

يعد ذلك، المعاملات الداخلة Cj - Zj والحل للعمود للخلية المصفوفة Cj - Zj موضحة في الجدول 15.1.

طريقة اختيار العمود:

1- اختيار رقم Cj - Zj التي تقع في دائرة الحل.

2- إيجاد أكبر قيمة موضحة، فمثلا P1 = 1Q

P3 = 20 للمسألة (minimization)

3- اختيار أقل قيمة سالبة في المصفوفة ولتكن (1-) تحت العمود x_2,x_1 وباعتبار تكرار عند x_2 إذا تختار x_2 لأن أكثر قيمة سالبة (2-) والتي تقع في العمود x_1.

4- عليه يتم اختيار العمود x_1.

5- يتم اختيار الصنف التي يحقق أقل نسبة موجبة وتمثيل ذلك الصنف d_2.

وبناء عليه يكون الجدول 15.2.

Table 15.2 Iteration 1

	C_j	0	0	P_1	$2P_3$	P_3	0	P_4	P_2		
CB_i	Basic variable	x_1	x_2	d_{1-}^{-}	d_{2-}^{-}	d_{3-}^{-}	d_{4-}^{-}	d_{1-}^{+}	d_4^{+}	Solution	Ratio
P_1	d_{1-}	0	1	-1	0	0	0	-1	0	4	4*
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	6	-
P_3	d_{3-}	0	1	0	0	1	0	0	0	8	8
0	d_{4-}	0	0	0	0	0	1	1	-1	2	-
Cj-Zj	p_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	p_3	-2	-1	0	2	0	0	0	0	8	
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	p_1	0	-1*	0	1	0	0	1	0	4	

تخصصت كما يلي Cj - Zj are:

$C_1 - Z_1 = 0$

$C_2 - Z_2 = 0 - (p_1 + p_3) = - p_1 - p_3$

$C_3 - Z_3 = p_1 - (p_{1)} = 0$

$C_4 - Z_4 = 2p_3 - (-p_{1)} = 2p_3 + p_1$

$C_5 - Z_5 = p_3 - p_3 = 0$

$C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$

$C_7 - Z_7 = p_4 - (-p_1) = p_4 + p_1$

$C_8 - Z_8 = p_2$

نلاحظ في الجدول 15.2 لتفضيل الصفوف p_1 ، p_2 بالقيم 4 ، 8.

وبإيجاد أقل قيمة سالبة في الصف p_1 والتي سوف تتحقق في العمود x_2 والذي يحتوى على قيمة سالبة واحدة هي 1- في الصف p_1.

وبالحصول على نسبة في الجدول 15.2 حيث أقل قيمة موجبة.

إذا الصف الأول (صف d1) والتي يمكن تحقيقه في الجدول 15.3.

Table 15.3 Iteration 1

	C_j	0	0	P_1	$2P_3$	P_3	0	P_4	P_2		
CB_i	Basic variable	x_1	x_2	d_{1-}^{-}	d_{2-}^{-}	d_{3-}^{-}	d_{4-}^{-}	d_{1-}^{+}	d_4^{+}	Solution	Ratio
0	x_{2-}	0	1	-1	-1	0	0	-1	0	4	-
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	6	-
P_3	d_{3-}	0	0	-1	1	1	0	0	0	4	4
0	d_{4-}	0	0	0	0	0	1	1	-1	2	2*
Cj-Zj	p_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
	p_3	0	0	1	1	0	0	-1	0	4	
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
	p_1	0	0	1	0	0	0	+0	0	0	

The expressions for different Cj - Zj are derived as shown below.

$C_1 - Z_1 = 0 - 0 = 0$

$C_2 - Z_2 = 0$

$C_3 - Z_3 = p_1 - (-p_3) = p_1 + p_3$

$C_4 - Z_4 = 2p_3 - (-p_3) = p_3$

$C_5 - Z_5 = p_3 - p_3 = 0$

$C_6 - Z_6 = 0 - 0 = 0$

$C_7 - Z_7 = p_4 - p_3$

$C_8 - Z_8 = p_2 - 0 = p_2$

وبما أن الصف P1 في المصفوفة، يجب اختيار معاملات Cj - Zj والتي تعطي:

1- في العمود d1 ويتضح 15.4 على النحو الآتي:

Table 15.4 Iteration 3

	C_j	0	0	P_1	$2P_3$	P_3	0	P_4	P_2	
CB_i	Basic variable	x_1	x_2	d_{1-}^{-}	d_{2-}^{-}	d_{3-}^{-}	d_{4-}^{-}	d_{1-}^{+}	d_4^{+}	Solution
0	x_{2-}	0	1	1	-1	0	0	-1	0	6
0	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	6
P_3	d_{3-}	0	0	-1	1	1	0	0	0	2
P_4	d_{1-}	0	0	0	0	0	1	1	-1	2
Cj-Zj	p_4	0	0	0	0	0	0	1	0	2
	p_3	0	0	1	1	0	0	-1	0	2
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	p_1	0	0	1	0	0	0	0+	0	0

ويتضح قيم Cj - Zj:

$C_1 - Z_1 = 0 - 0 = 0$

$C_2 - Z_2 = 0$

$C_3 - Z_3 = p_1 - (-p_3) = p_1 + p_3$

$C_4 - Z_4 = 2p_3 - p_3 = p_3$

$C_5 - Z_5 = p_3 - p_3 = 0$

$C_6 - Z_6 = 0 - (-p_3 + p_4) = p_3 - p_4$

$C_7 - Z_7 = p_4 - p_4 = 0$

$C_8 - Z_8 = p_2 - (p_3 - p_4) = p_2 - p_3 + p_4$

نلاحظ أن الصف p_3 يحتوي على 1- للعمود d_4.

إذا كنا نرغب في تحقيق هدف 3 (صف p_1) لابد من تضعف الهدف p_2 ويتم الباقي بالتشابه، وبما أن كل القيم في المصفوفة تساوي 0 إذا المسألة وصلت إلى الحل الأمثل التصغيري.

وتكون النتائج على النحو الآتي:

- عدد هياكل أجهزة الحاسوب التي يتصل إنتاجها يوميا $x_1 = 6$
- عدد صناديق حمل الأسطوانات التي يفضل إنتاجها يوميا $x_2 = 6$
- الانخفاض المتوقع في المبيعات x_2، وحدة $d_3^- = 2$
- الارتفاع المتوقع في سعة الإنتاج في اليوم $d_1^+ = 2$ ساعة.

15.4 مسائل:

1- شركة صناعية تنتج منتجان x_1، x_2 ولها المواصفات التالية:

المنتج	الربح الجالون	كمية المواد الكيميائية اللازمة الإنتاج من نوع A الجالون	كمية المواد كيميائية اللازمة الإنتاج من B	كمية المادة المضافة بالجالون
A	80 دينار	4	4	1
B	100 دينار	5	2	0
الكمية المتاحة يوميا بالكيلوجرام	0	80	48	6

مع التقييد بالقيود الآتية للإنتاج:

أ - كميات المواد الكيميائية المتاحة من النوع A ، B محددة غير قابلة للزيادة.

ب- علما بأن أهداف الشركة على النحو الآتي: يجب أن تحقق الشركة مبلغ 800 د.ل كأرباح يوميا.

ج- كمية المادة المضافة يوميا تصل أقل عن 6 كيلوجرام.

د- يجب أن كمية مجموع المنتوجات اليومية في طلبية ممكنة.

المطلوب صياغة المسألة على هيئة برمجة تحقيق الأهداف الخطية.

2- شركة تنتج منتوجات، منتج A مردوده 10 دينار للوحدة، وينتج B مردوده 8 دينار للوحدة. منتج A يحتاج إلى 3 ساعات للوحدة في عملية التجميع، ومنتج B يحتاج إلى ساعتان للإنتاج. مجموع الساعات المتاحة للتجميع 120 ساعة أسبوعيا، وأحيانا مطلوب بعض الساعات الإضافية، وإذا أحسن استخدام الزمن الإضافي، ووفق العقد المبرم للإنتاج يجب أن تنتج الشركة 30 وحدة أسبوعيا من المنتجين A ، B.

عليه، فإن مالك الشركة يرغب في تحقيق الأهداف الآتية:

أ - يجب أن يتحقق الإنتاج في الزمن المتاح وبدون ساعات إضافية والتي يساوى 120 ساعة/ أسبوعيا.

ب- الزمن الإضافي يجب أن يكون على الحد الأدنى.

ج- الربح يجب أن يكون أعظم ما يمكن.

3- اشرح صياغة المسألة ببرمجة الأهداف خطيا:

(Deviation Variables)

(d_{1-} , d_{1+}) والمتغيرات الإضافية (Slack reliable) تستخدم في البرمجة.

4- نوعان من الدرجات النارية أحدهما تباع بـ ٦٥٠ د.ل. والأخرى تباع بـ 785 د.ل. حيث الأول يمكن إنتاجها محليا، والثاني يتم توريدها من خارج البلاد. فإذا تم توريد المستورد غير مجمعة فسوف تكلف 185 د.ل.، وسوف نعرف من الجدول التالي معلومات عن زمن الإنتاج،وزمن التجميع، وزمن الاختيار، وتكلفة الإنتاج، وذلك على النحو الآتي:

	الساعة/ الوحـدة		زمن الاختيار
	زمن الإنتاج	زمن التجميع	
المصنعة محليا	20	5	3
المستوردة	0	7	6
تكلفة العمالة/الساعة بالدينار			

وترغب الشركة في تحقيق النتائج والأهداف الآتية:

أ - أن يتحقق ربح قدره 3000 دينار/ أسبوعيا على الأقل.

ب- الزمن المتاح أسبوعيا 120، 80، 40 ساعة وقت عادي للإنتاج والتجميع والاختيار.

ج- صياغة الشركة أن يتبع أكبر ممكنة من الإنتاج المحلي.

د- ترغب الشركة في تصغير الزمن الضائع ولا تضطر لإعطاء زمن إضافي.

المطلوب صياغة المسألة ببرمجة الأهداف خطيا.

5- أذكر تطبيقات برمجة متعددة الأهداف.

6- شركة تنتج 3 أنواع من المصابيح الكهربائية A ، B ، C وتنتج هذه المصابيح في خطوتين؛ الأول خرط والثاني طحن. وجدول توفر زمن الإنتاج على النحو الآتي:

	A (hr)	A (hr)	A (hr)	الزمن المتاح بالساعة
خرطة	1	3	4	1800
طحن	2	2	3	1500

وأن الربح المتوقع لكل نوع على التوالي 4.5 دينار، 5.50 دينار، 6.75 دينار. والشركة لها هدفان تصغير زمن التأخير للآلات وتعظيم الربح حتى 12,000 دينار شهريا.

المطلوب: صياغة المسألة في صورة برمجة خطية متعددة الأهداف.

المراجـــع

References

1- Bazaraa, S.M. & 1. 1. Jarvis, Linear Programming and Net wood Flows (1977). John wilwy sons. Inc. USA.

2- Broke, R. , Project Management: Planning and control (1993) wiley, New York, USA.

3- Chase, R. B . q N. J. Aquilano, Production and Operation Management, (1981), Richard D. I rwin, Inc. , illinois, USA.

4- Duellenbach, H. G. r J . A . George and D . C. Mc Nickel, Introduction to Operations Research Techniques. (1983) Allyn and Bacon. INC . Massachusetts USA.

5- Dil worth, J . B . , Operations Management (1996) Mc Graw - Hill Co. lnc, Toronto. CANADA

6- Hartly. R. V. Operation Research: A , Managerial Emphasis (1976). Good year Pub. Company INC. Cat. USA.

7- Hillier. F. S. Introduction in Operations Research (1990) New York: Me - Graw Hill. USA.

8- Ignizio, J . P. Linear Programming in single and Multiple objective systems (1982). Prentice - Hall, INC. , N . J. USA.

9- Law, A. M . and W . D. Kelton - Simulation Modeling and Analysis (1991) 2dedit. New York, MC - Graw - Hill.

10- Kerzner, H. Project Management: A System Approach to Planning Scheduling and control (1992) New York: Yen no strand Reinhold.

11- Naddor, E. Inventory system. (1966) John wiley & sons, INC. USA.

12- Slak, N. And others. Operation Management (1995) Pitman Publishing, London. UK.

13- Taha, H . A. Operations Research: an I introduction, 3 rd ed. (1982). Mc Millan, Pub, Co. , INC. USA.

14- Tersine, R. 1. Principles ofInventory and Materials Management, 4th ed. (1993). Englewood, cliffs, N. 1. Prentice hall.

15- Waters, C . D. 1. Inventooy control and Management (1992) chichester: wiley USA.

16- Wagner, H. M. Principle of Operations Research (1975) Prentice Ham, INC. England cliffs, N. 1. USA.

17- Wild. R. Production and Operations management 5th ed. (1995) 13 ath press, England.

قائمة المصطلحات

Glossary

A

Analysis of variance	تحليل المتغيرات
Actual inventory	الجرد الفعلي
Axis	محور
Average collection period	متوسط مدة التحصيل
Average physical product	متوسط الإنتاج الفعلي
Arithmetical progression	متوالية حسابية
Alternative optimum solution	حل مثالي بديل
Artificial variable	المتغير الصناعي
Assignment model	نموذج التعين (أو التخصيص)
Analogue model	النموذج المماثل

B

Binomial distribution	توزيع حداني
Bimodal	ثنائي المنوال
Bid	عطاء
Base period	فترة الأساس
Buffer stock	مخزون دارئ
Break - up value	قيمة تصفية المنشأة
Business cycle	دورة اقتصادية
Bilateral flows	تدفقات ثنائية

Basic motion time	وقت الحركة الأساسية
Batch production	الإنتاج بالدفعات
Batch costing	تقدير تكاليف الدفعة
Business logistics	الإمداد والتموين في المشروع
Branch - and - Bound method	طريقة حل البرمجة الخطية للأعداد الصحية بواسطة التوزيع والنظم

C

Constants	ثوابت
Correlation	ترابط
Coordinates	إحداثيات
Controllable variables	المتغيرات المسيطر عليها
Convexe	محدب
Correlation coefficient	معامل الترابط
Coefficient of determination	معامل التحديد
Coefficient	معامل
Continuous variable	متغير مستمر
Constraints	قيود
Convex function	دالة مقعدة
Continuous simulation	المحاكاة المستمرة
Critical Path Analysis (CPA)	تحليل المسار الحرج
Consumption function	دالة الاستهلاك
Cost function	دالة التكلفة
Costs	تكاليف
Cost of goods sold	تكلفة السلع المبيعة
Cost of capital	تكلفة رأس المال
Computer simulation	المحاكاة بالحاسوب

Capital stock	مخزون رأسمالي
Cost determination	تحديد التكاليف
Cost of production	تكاليف الإنتاج
Cost elements	عناصر التكاليف
Critical path scheduling	وضع جداول زمنية للأعمال الحرجة
Case study	دراسة حالة
Concentration measures	مقياس التركيز
Cost minimization	تقليل التكاليف

D

Demand function	دالة الطلب
Delivery note	إشعار تسليم
Dispersion	تشتت
Dynamic analysis	تحليل دينامي
Dimension motion time	وقت الحركة البعدية
Distribution system	نظام التوزيع
Dependent variable	متغير تابع
Distribution efficiency	فاعلية توزيعية
Decision tree	شجرة القرار
Demand	الطلب
Derived demand	طلب مشتق
Duality	ثنائية
Dual	ثنائي
Duality in linear programming	النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية
Dual problem	النموذج الثنائي (المشكلة)
Dual values	القيم الثنائية

Discrete simulation	المحاكاة المتقطعة
Dual simplex method	طريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس

E

Extreme points theory	نظرية نقاط التقاطع
Exponential distribution	توزيع أسي
Earlang distribution	توزيع ايرنلق
Equations	المعادلات
Excess demand	فائض الطلب
Exogenous variable	متغير خارجي المنشأ
Endogenous variable	متغير داخلي المنشأ
Exponential function	دالة أسية
Excess capacity	طاقة زائدة
Expected value	القيمة المتوقعة
Economic lot size	حجم الدفعة الاقتصادية
Exponential smoothing	تسوية أسية

f

Factor cost	تكلفة العوامل
Factory cost	التكلفة في المصنع
Frequency distribution	توزيع تكراري (توزيع التواتر)
Feasibility study	دراسة الجدوى
Fixed point constants	ثوابت الفاصلة الثابتة
Factory inputs	مدخلات الإنتاج
Full capacity	طاقة كاملة
Factor	عامل إنتاج
Factors of production	عوامل الإنتاج

Financial control	الرقابة المالية
Feasible area	المنطقة الممكنة
Fixed - time period model	نماذج الطلبية الاقتصادية عندما تكون الفترة الزمنية ثابتة
Fixed order quantity with backorders	نمط طلب الكمية الاقتصادية مع السماح بفقدان المخزون

G

Graphical solution of linear programming	استخدام الطرق البيانية في حل نموذج البرمجة الخطية
Geometrical progression	متوالية هندسية
Graph	رسم بياني
Game theory	نظرية المباريات (الألعاب)

H

Hypothesis	فرضية
Histogram	مدرج تكراري

I

Inequalities	الغير متعادلات
Infeasible area	منطقة غير منظورة
Information analysis	تحليل المعلومات
Investment evaluation	تقييم الاستثمارات
Index number	رقم قياسي
Independent variable	متغير مستقل
Isoquant map	مخطط الكميات المتساوية
Integers	الأعداد الصحيحة
Inventory control	مراقبة المخزون
Inventory variation	دوران المخزون

Inventory turnover	انحراف قيمة المخزون
Input - output analysis	تحليل المدخلات والمخرجات
Identity	تماثل
Isocost line	خط تساوي التكاليف
Industrialization	تصنيع
Integer programming	برمجة الأعداد الصحيحة
Inventory holding cost	تكلفة حفظ المخزون

J

Joint demand	طلب مشترك

L

Linear programming	برمجة خطية
Long run	مدى طويل
Lead time	الزمن اللازم لتوفير الطلبية بعد إصدار الأمر
Line production	الإنتاج الخطي
Linear functions	الدوال الخطية
Limiting factor	عامل محدد

M

Moving average	متوسط متحرك
Mean, Average	متوسط
Maintenance costs	تكاليف الصيانة
Maintenance margin	هامش وقاية (صيانة)
Materials costs	تكلفة المواد
Materials cost variance	انحراف تكلفة المواد

Modular production	الإنتاج المعياري
Mathematical model	النمط الرياضي
Max. Profit	تعظيم الربح
Min. Cost	تصغير التكلفة
Min. Overtime	تصغير الوقت الضائع
Model validity	تحقيق أنماط البرمجة الخطية
Mixed strategies	الخطط (الاستراتيجيات) المختلطة
Maximization problem	مسألة تعظيم
Minimization problem	مسألة تصغير
Monte carlo simulation	محاكاة مونتي كارلو
Multiple correlation coefficient	معامل الترابط المتعدد
Margin of error	هامش الخطأ
Multiple linear regression	تكرار خطي متعدد
Marginal cost	تكلفة حدية
Mass production	الإنتاج الوفير

N

Nominal values	قيم أسمية
North - west corner	طريقة زاوية الركن الشمالي - الغربي
Non - negativity conditions	شروط عدم السلبية
Non - linear functions	الدوال غير الخطية
Null hypothesis	فرضية باطلة
Necessary condition	شروط لازم
Non - optimal	غير مثالي

O

Optimum order quantity	كمية الطلب المثلي

الأهداف	Objectives
الحل الأمثل	Optimum solution
طلبية	Order
التكلفة الفرضية (تكلفة الفرضة)	Opportunity cost
المربعات الدنيا العادية	Ordinary least squares
تكاليف ثابتة	Overhead costs, fixed costs
بحوث العمليات	Operation research

P

إنتاج	Production
تخطيط الإنتاج	Production planning
تحليل الإنتاج	Production analysis
نظام الإنتاج	Production system
إنتاجية	Productivity
احتمال إنتاجي	I Productive potential
احتمال	Probability
توزيع الاحتمال	Probability distribution
حد احتمال الإنتاج	Production possibility boundary
صياغة مسائل البرمجة الخطية	Problem formulation
تخطيط المشروعات	Project planning
دالة احتمال التوزيع	Probability distribution function
توزيع بوسان	Possion distribution
أنماط التخزين المعتمدة على تغير أسعار المواد المخزونة	Price - break models
مخطط دائري	Pie chart
محيرة القيمة	Paradox of value
نظرية دورة حياة المنتج	Product life - cycle theory

تحليل التوازن الجزئي — Partial equilibrium analysis

Q

مراقبة الجودة — Quality control
مراقبة الكمية — Quality control
عينة مخصصة — Quota sample
الانتظار في الطابور — Queueing
خطوط الانتظار — Queueing lines

R

تحليل التراجع — Regression analysis
تكلفة الإحلال والتجديد — Replacement cost
البحث والتطوير — Research & Development (R&D)
الأرقام العشوائية — Random numbers
عينة عشوائية — Random sample
مخاطرة — Risk
تكلفة إعداد الطلبية — Replenishment cost
القيود المتكررة — Redundant constraints
عوائد حجم الإنتاج — Returns to scale
قيم حقيقية — Real values
معدل العائد — Rate of return
احتياطيات — Reserves

S

تكدس المخزون — Stockpiling
انحراف معياري — Standard deviation

Standard cost	تكلفة قياسية
Short run	قصر المدى
Sample	عينة
Safety stock	مخزون آمان (احتياطي)
Simulation	محاكاة
Scatter diagram	مخطط الانتشار
Slack variable	المتغير الفارق
Sensitivity analysis	تحليل الحسابية
Stock replenishment	زيادة (تعزيز) المخزون
Stratified sample	عينة طبقية
Standard error	خطأ معياري
Shortage cost	تكلفة فقدان المخزون

T

Two - person zero - sum game	المجموع الصفري للاعبين متقابلين
Time horizon	الخطة الزمنية

U

Unrestricted variables	المتغيرات الغير محدودة المدى
Uncertainty	عدم التأكد (أو عدم التيقن)
Uniform distribution	توزيع منتظم

V

Vogel's approximation	طريقة فوجل التقريبية

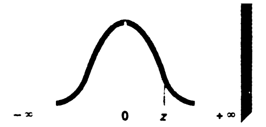
W

Waiting line theory	نظرية نظام خطوط الانتظار

الملاحــق

APPENDICES

APPENDIX 1



CUMULATIVE PROBABILITIES OF THE NORMAL DISTRIBUTION
(Areas under the Standardized Normal Curve from − ∞ to *Z*)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5389	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

APPENDIX II

LEARNING CURVE TABLES

95%

UNIT NUMBER	TIME FOR UNIT	CUMULATIVE TOTAL TIME FOR ALL UNITS	CUMULATIVE AVERAGE TIME OVER ALL UNITS
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9500	1.9500	0.9750
4	0.9025	3.7744	0.9436
5	0.8877	4.6621	0.9324
7	0.8659	6.4039	0.9148
10	0.8433	8.9545	0.8954
15	0.8184	13.0921	0.8728
20	0.8012	17.1302	0.8565
25	0.7880	21.0955	0.8438
30	0.7775	25.0032	0.8334
40	0.7611	32.6838	0.8171
50	0.7486	40.2239	0.8045
70	0.7302	54.9924	0.7856
100	0.7112	76.5864	0.7659
200	0.6756	145.6929	0.7285
300	0.6557	212.1772	0.7073
400	0.6419	277.0121	0.6925
500	0.6314	340.6472	0.6813
700	0.6158	465.2648	0.6647
1,000	0.5998	647.4463	0.6474
1,500	0.5821	942.5870	0.6284
2,000	0.5698	1,230.3796	0.6152
2,500	0.5605	1,512.8486	0.6051
3,000	0.5530	1,791.1396	0.5970
3,500	0.5467	2,066.0035	0.5903
4,000	0.5413	2,337.9672	0.5845
5,000	0.5325	2,874.4123	0.5749

90%

UNIT NUMBER	TIME FOR UNIT	CUMULATIVE TOTAL TIME FOR ALL UNITS	CUMULATIVE AVERAGE TIME OVER ALL UNITS
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.9000	1.9000	0.9500
4	0.8100	3.5562	0.8891
5	0.7830	4.3391	0.8678
7	0.7438	5.8447	0.8350
10	0.7047	7.9945	0.7994
15	0.6626	11.3837	0.7589
20	0.6342	14.6078	0.7304
25	0.6131	17.7132	0.7085
30	0.5963	20.7269	0.6909
40	0.5708	26.5427	0.6636
50	0.5518	32.1420	0.6428
70	0.5243	42.8706	0.6124
100	0.4966	58.1410	0.5814
200	0.4469	104.9641	0.5248
300	0.4202	148.2040	0.4940
400	0.4022	189.2678	0.4732
500	0.3889	228.7851	0.4576
700	0.3694	304.4757	0.4350
1,000	0.3499	412.1718	0.4122
1,500	0.3290	581.4952	0.3877
2,000	0.3149	742.2854	0.3711
2,500	0.3044	897.0392	0.3588
3,000	0.2961	1,047.0770	0.3490
3,500	0.2893	1,193.3681	0.3410
4,000	0.2834	1,336.5057	0.3341
5,000	0.2740	1,614.6705	0.3229

85%

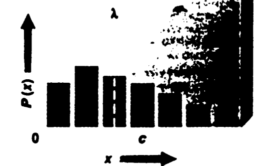
UNIT NUMBER	TIME FOR UNIT	CUMULATIVE TOTAL TIME FOR ALL UNITS	CUMULATIVE AVERAGE TIME OVER ALL UNITS
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.8500	1.8500	0.9250
4	0.7225	3.3454	0.8364
5	0.6857	4.0310	0.8062
7	0.6337	5.3217	0.7602
10	0.5828	7.1161	0.7116
15	0.5300	9.8611	0.6574
20	0.4954	12.4023	0.6201
25	0.4701	14.8007	0.5920
30	0.4505	17.0907	0.5697
40	0.4211	21.4252	0.5356
50	0.3996	25.5131	0.5103
70	0.3693	33.1664	0.4738
100	0.3397	43.7539	0.4375
200	0.2887	74.7885	0.3739
300	0.2625	102.2301	0.3408
400	0.2454	127.5690	0.3189
500	0.2329	151.4504	0.3029
700	0.2152	196.1344	0.2802
1,000	0.1980	257.9180	0.2579
1,500	0.1800	352.0333	0.2347
2,000	0.1683	438.9276	0.2195
2,500	0.1597	520.8187	0.2083
3,000	0.1530	598.9313	0.1996
3,500	0.1476	674.0355	0.1926
4,000	0.1430	746.6567	0.1867
5,000	0.1357	885.8752	0.1772

80%				75%			
UNIT NUMBER	TIME FOR UNIT	CUMULATIVE TOTAL TIME FOR ALL UNITS	CUMULATIVE AVERAGE TIME OVER ALL UNITS	UNIT NUMBER	TIME FOR UNIT	CUMULATIVE TOTAL TIME FOR ALL UNITS	CUMULATIVE AVERAGE TIME OVER ALL UNITS
1	1.0000	1.0000	1.0000	1	1.0000	1.0000	1.0000
2	0.8000	1.8000	0.9000	2	0.7500	1.7500	0.8750
4	0.6400	3.1421	0.7855	4	0.5625	2.9463	0.7366
5	0.5956	3.7378	0.7475	5	0.5127	3.4591	0.6918
7	0.5345	4.8340	0.6906	7	0.4459	4.3837	0.6258
10	0.4765	6.3154	0.6315	10	0.3846	5.5886	0.5589
15	0.4182	8.5105	0.5674	15	0.3250	7.3190	0.4879
20	0.3812	10.4849	0.5242	20	0.2884	8.8284	0.4414
25	0.3548	12.3086	0.4923	25	0.2629	10.1907	0.4076
30	0.3346	14.0199	0.4673	30	0.2437	11.4458	0.3815
40	0.3050	17.1935	0.4298	40	0.2163	13.7232	0.3531
50	0.2838	20.1217	0.4024	50	0.1972	15.7761	0.3155
70	0.2547	25.4708	0.3639	70	0.1715	19.4296	0.2776
100	0.2271	32.6508	0.3265	100	0.1479	24.1786	0.2418
200	0.1816	52.7200	0.2636	200	0.1109	36.8007	0.1840
300	0.1594	69.6634	0.2322	300	0.0937	46.9427	0.1565
400	0.1453	84.8487	0.2121	400	0.0832	55.7577	0.1394
500	0.1352	98.8472	0.1977	500	0.0758	63.6753	0.1274
700	0.1214	124.3984	0.1777	700	0.0659	77.7693	0.1111
1,000	0.1082	158.6709	0.1587	1,000	0.0569	96.0728	0.0961
1,500	0.0950	209.1580	0.1394	1,500	0.0481	122.0917	0.0814
2,000	0.0866	254.3996	0.1272	2,000	0.0427	144.6762	0.0723
2,500	0.0806	296.1018	0.1184	2,500	0.0389	165.0079	0.0660
3,000	0.0760	355.1843	0.1117	3,000	0.0360	183.7078	0.0612
3,500	0.0723	372.2146	0.1063	3,500	0.0338	201.1512	0.0575
4,000	0.0692	407.5742	0.1019	4,000	0.0320	217.5865	0.0544
5,000	0.0644	474.3001	0.0949	5,000	0.0292	247.5119	0.0495

Appendix III (continued)

λ OR np′ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.2	0.111	0.355	0.623	0.819	0.928	0.975	0.993	0.998	1.000	
2.4	0.091	0.308	0.570	0.779	0.904	0.964	0.988	0.997	0.999	1.000
2.6	0.074	0.267	0.518	0.736	0.877	0.951	0.983	0.995	0.999	1.000
2.8	0.061	0.231	0.469	0.692	0.848	0.935	0.976	0.992	0.998	0.999
3.0	0.050	0.199	0.423	0.647	0.815	0.916	0.966	0.988	0.996	0.999
3.2	0.041	0.171	0.380	0.603	0.781	0.895	0.955	0.983	0.994	0.998
3.4	0.033	0.147	0.340	0.558	0.744	0.871	0.942	0.977	0.992	0.997
3.6	0.027	0.126	0.303	0.515	0.706	0.844	0.927	0.969	0.988	0.996
3.8	0.022	0.107	0.269	0.473	0.668	0.816	0.909	0.960	0.984	0.994
4.0	0.018	0.092	0.238	0.433	0.629	0.785	0.889	0.949	0.979	0.992
4.2	0.015	0.078	0.210	0.395	0.590	0.753	0.867	0.936	0.972	0.989
4.4	0.012	0.066	0.185	0.359	0.551	0.720	0.844	0.921	0.964	0.985
4.6	0.010	0.056	0.163	0.326	0.513	0.686	0.818	0.905	0.955	0.980
4.8	0.008	0.048	0.143	0.294	0.476	0.651	0.791	0.887	0.944	0.975
5.0	0.007	0.040	0.125	0.265	0.440	0.616	0.762	0.867	0.932	0.968
5.2	0.006	0.034	0.109	0.238	0.406	0.581	0.732	0.845	0.918	0.960
5.4	0.005	0.029	0.095	0.213	0.373	0.546	0.702	0.822	0.903	0.951
5.6	0.004	0.024	0.082	0.191	0.342	0.512	0.670	0.797	0.886	0.941
5.8	0.003	0.021	0.072	0.170	0.313	0.478	0.638	0.771	0.867	0.929
6.0	0.002	0.017	0.062	0.151	0.285	0.446	0.606	0.744	0.847	0.916

	10	11	12	13	14	15	16
2.8	1.000						
3.0	1.000						
3.2	1.000						
3.4	0.999	1.000					
3.6	0.999	1.000					
3.8	0.998	0.999	1.000				
4.0	0.997	0.999	1.000				
4.2	0.996	0.999	1.000				
4.4	0.994	0.998	0.999	1.000			
4.6	0.992	0.997	0.999	1.000			
4.8	0.990	0.996	0.999	1.000			
5.0	0.986	0.995	0.998	0.999	1.000		
5.2	0.982	0.993	0.997	0.999	1.000		
5.4	0.977	0.990	0.996	0.999	1.000		
5.6	0.972	0.988	0.995	0.998	0.999	1.000	
5.8	0.965	0.984	0.993	0.997	0.999	1.000	
6.0	0.957	0.980	0.991	0.996	0.999	0.999	1.000



APPENDIX III

CUMULATIVE POISSON PROBABILITIES $P(x \leq c \mid \lambda) = \sum_{x=0}^{x=c} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

λ OR np′ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.02	0.980	1.000								
0.04	0.961	0.999	1.000							
0.06	0.942	0.998	1.000							
0.08	0.923	0.997	1.000							
0.10	0.905	0.995	1.000							
0.15	0.861	0.990	0.999	1.000						
0.20	0.819	0.982	0.999	1.000						
0.25	0.779	0.974	0.998	1.000						
0.30	0.741	0.963	0.996	1.000						
0.35	0.705	0.951	0.994	1.000						
0.40	0.670	0.938	0.992	0.999	1.000					
0.45	0.638	0.925	0.989	0.999	1.000					
0.50	0.607	0.910	0.986	0.998	1.000					
0.55	0.577	0.894	0.982	0.998	1.000					
0.60	0.549	0.878	0.977	0.997	1.000					
0.65	0.522	0.861	0.972	0.996	0.999	1.000				
0.70	0.497	0.844	0.966	0.994	0.999	1.000				
0.75	0.472	0.827	0.959	0.993	0.999	1.000				
0.80	0.449	0.809	0.953	0.991	0.999	1.000				
0.85	0.427	0.791	0.945	0.989	0.998	1.000				
0.90	0.407	0.772	0.937	0.987	0.998	1.000				
0.95	0.387	0.754	0.929	0.984	0.997	1.000				
1.00	0.368	0.736	0.920	0.981	0.996	0.999	1.000			
1.10	0.333	0.699	0.900	0.974	0.995	0.999	1.000			
1.20	0.301	0.663	0.879	0.966	0.992	0.998	1.000			
1.30	0.273	0.627	0.857	0.957	0.989	0.998	1.000			
1.40	0.247	0.592	0.833	0.946	0.986	0.997	0.999	1.000		
1.50	0.223	0.558	0.809	0.934	0.981	0.996	0.999	1.000		
1.60	0.202	0.525	0.783	0.921	0.976	0.994	0.999	1.000		
1.70	0.183	0.493	0.757	0.907	0.970	0.992	0.998	1.000		
1.80	0.165	0.463	0.731	0.891	0.964	0.990	0.997	0.999	1.000	
1.90	0.150	0.434	0.704	0.875	0.956	0.987	0.997	0.999	1.000	
2.00	0.135	0.406	0.677	0.857	0.947	0.983	0.995	0.999	1.000	

Appendix III (continued)

λ OR np′ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6.2	0.002	0.015	0.054	0.134	0.259	0.414	0.574	0.716	0.826	0.902
6.4	0.002	0.012	0.046	0.119	0.235	0.384	0.542	0.687	0.803	0.886
6.6	0.001	0.010	0.040	0.105	0.213	0.355	0.511	0.658	0.780	0.869
6.8	0.001	0.009	0.034	0.093	0.192	0.327	0.480	0.628	0.755	0.850
7.0	0.001	0.007	0.030	0.082	0.173	0.301	0.450	0.599	0.729	0.830
7.2	0.001	0.006	0.025	0.072	0.156	0.276	0.420	0.569	0.703	0.810
7.4	0.001	0.005	0.022	0.063	0.140	0.253	0.392	0.539	0.676	0.788
7.6	0.001	0.004	0.019	0.055	0.125	0.231	0.365	0.510	0.648	0.765
7.8	0.000	0.004	0.016	0.048	0.112	0.210	0.338	0.481	0.620	0.741
8.0	0.000	0.003	0.014	0.042	0.100	0.191	0.313	0.453	0.593	0.717
8.5	0.000	0.002	0.009	0.030	0.074	0.150	0.256	0.386	0.523	0.653
9.0	0.000	0.001	0.006	0.021	0.055	0.116	0.207	0.324	0.456	0.587
9.5	0.000	0.001	0.004	0.015	0.040	0.089	0.165	0.269	0.392	0.522
10.0	0.000	0.000	0.003	0.010	0.029	0.067	0.130	0.220	0.333	0.458

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6.2	0.949	0.975	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000			
6.4	0.939	0.969	0.986	0.994	0.997	0.999	1.000			
6.6	0.927	0.963	0.982	0.992	0.997	0.999	0.999	1.000		
6.8	0.915	0.955	0.978	0.990	0.996	0.998	0.999	1.000		
7.0	0.901	0.947	0.973	0.987	0.996	0.998	0.999	1.000		
7.2	0.887	0.937	0.967	0.984	0.993	0.997	0.999	0.999	1.000	
7.4	0.871	0.926	0.961	0.980	0.991	0.996	0.998	0.999	1.000	
7.6	0.854	0.915	0.954	0.976	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000	
7.8	0.835	0.902	0.945	0.971	0.986	0.993	0.997	0.999	1.000	
8.0	0.816	0.888	0.936	0.966	0.983	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000
8.5	0.763	0.849	0.909	0.949	0.973	0.986	0.993	0.997	0.999	0.999
9.0	0.706	0.803	0.876	0.926	0.959	0.978	0.989	0.995	0.998	0.999
9.5	0.645	0.752	0.836	0.898	0.940	0.967	0.982	0.991	0.996	0.998
10.0	0.583	0.697	0.792	0.864	0.917	0.951	0.973	0.986	0.993	0.997

	20	21	22
8.5	1.000		
9.0	1.000		
9.5	0.999	1.000	
10.0	0.998	0.999	1.000

Appendix III (continued)

λ OR np′ \ c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.5	0.000	0.000	0.002	0.007	0.021	0.050	0.102	0.179	0.279	0.397
11.0	0.000	0.000	0.001	0.005	0.015	0.038	0.079	0.143	0.232	0.341
11.5	0.000	0.000	0.001	0.003	0.011	0.028	0.060	0.114	0.191	0.289
12.0	0.000	0.000	0.001	0.002	0.008	0.020	0.046	0.090	0.155	0.242
12.5	0.000	0.000	0.000	0.002	0.005	0.015	0.035	0.070	0.125	0.201
13.0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.011	0.026	0.054	0.100	0.166
13.5	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.019	0.041	0.079	0.135
14.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.006	0.014	0.032	0.062	0.109
14.5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.010	0.024	0.048	0.088
15.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.008	0.018	0.037	0.070
	10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
10.5	0.521	0.639	0.742	0.825	0.888	0.932	0.960	0.978	0.988	0.994
11.0	0.460	0.579	0.689	0.781	0.854	0.907	0.944	0.968	0.982	0.991
11.5	0.402	0.520	0.633	0.733	0.815	0.878	0.924	0.954	0.974	0.986
12.0	0.347	0.462	0.576	0.682	0.772	0.844	0.899	0.937	0.963	0.979
12.5	0.297	0.406	0.519	0.628	0.725	0.806	0.869	0.916	0.948	0.969
13.0	0.252	0.353	0.463	0.573	0.675	0.764	0.835	0.890	0.930	0.957
13.5	0.211	0.304	0.409	0.518	0.623	0.718	0.798	0.861	0.908	0.942
14.0	0.176	0.260	0.358	0.464	0.570	0.669	0.756	0.827	0.883	0.923
14.5	0.145	0.220	0.311	0.413	0.518	0.619	0.711	0.790	0.853	0.901
15.0	0.118	0.185	0.268	0.363	0.466	0.568	0.664	0.749	0.819	0.875
	20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
10.5	0.997	0.999	0.999	1.000						
11.0	0.995	0.998	0.999	1.000						
11.5	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000					
12.0	0.988	0.994	0.997	0.999	0.999	1.000				
12.5	0.983	0.991	0.995	0.998	0.999	0.999	1.000			
13.0	0.975	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000			
13.5	0.965	0.980	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000		
14.0	0.952	0.971	0.983	0.991	0.995	0.997	0.999	0.999	1.000	
14.5	0.936	0.960	0.976	0.986	0.992	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000
15.0	0.917	0.947	0.967	0.981	0.989	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000

Appendix III (continued)

λ OR np′ \ c	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	0.000	0.001	0.004	0.010	0.022	0.043	0.077	0.127	0.193	0.275
17	0.000	0.001	0.002	0.005	0.013	0.026	0.049	0.085	0.135	0.201
18	0.000	0.000	0.001	0.003	0.007	0.015	0.030	0.055	0.092	0.143
19	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.009	0.018	0.035	0.061	0.098
20	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.005	0.011	0.021	0.039	0.066
21	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.006	0.013	0.025	0.043
22	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.015	0.028
23	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.009	0.017
24	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.003	0.005	0.011
25	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.006
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
16	0.368	0.467	0.566	0.659	0.742	0.812	0.868	0.911	0.942	0.963
17	0.281	0.371	0.468	0.564	0.655	0.736	0.805	0.861	0.905	0.937
18	0.208	0.287	0.375	0.469	0.562	0.651	0.731	0.799	0.855	0.899
19	0.150	0.215	0.292	0.378	0.469	0.561	0.647	0.725	0.793	0.849
20	0.105	0.157	0.221	0.297	0.381	0.470	0.559	0.644	0.721	0.787
21	0.072	0.111	0.163	0.227	0.302	0.384	0.471	0.558	0.640	0.716
22	0.048	0.077	0.117	0.169	0.232	0.306	0.387	0.472	0.556	0.637
23	0.031	0.052	0.082	0.123	0.175	0.238	0.310	0.389	0.472	0.555
24	0.020	0.034	0.056	0.087	0.128	0.180	0.243	0.314	0.392	0.473
25	0.012	0.022	0.038	0.060	0.092	0.134	0.185	0.247	0.318	0.394
	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
16	0.978	0.987	0.993	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000		
17	0.959	0.975	0.985	0.991	0.995	0.997	0.999	0.999	1.000	
18	0.932	0.955	0.972	0.983	0.990	0.994	0.997	0.998	0.999	1.000
19	0.893	0.927	0.951	0.969	0.980	0.988	0.993	0.996	0.998	0.999
20	0.843	0.888	0.922	0.948	0.966	0.978	0.987	0.992	0.995	0.997
21	0.782	0.838	0.883	0.917	0.944	0.963	0.976	0.985	0.991	0.994
22	0.712	0.777	0.832	0.877	0.913	0.940	0.959	0.973	0.983	0.989
23	0.635	0.708	0.772	0.827	0.873	0.908	0.936	0.956	0.971	0.981
24	0.554	0.632	0.704	0.768	0.823	0.868	0.904	0.932	0.953	0.969
25	0.473	0.553	0.629	0.700	0.763	0.818	0.863	0.900	0.929	0.950
	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
19	0.999	1.000								
20	0.999	0.999	1.000							
21	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000					
22	0.994	0.996	0.998	0.999	0.999	1.000				
23	0.988	0.993	0.996	0.997	0.999	0.999	1.000			
24	0.979	0.987	0.992	0.995	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000	
25	0.966	0.978	0.985	0.991	0.994	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000

RANDOM DIGITS

52 01 77 67	75 24 63 38	49 35 24 94	21 81 65 44	29 27 49 45
80 50 54 31	64 05 18 81	54 99 76 54	38 55 37 63	82 29 16 65
45 29 96 34	26 89 80 93	96 31 53 07	28 60 26 55	08 03 36 06
68 54 02 00	45 42 72 68	80 80 83 91	40 05 64 18	43 62 76 59
59 46 73 48	01 39 09 22	05 88 52 36	38 21 45 98	17 17 68 33
48 11 76 74	87 37 92 52	17 90 05 97	08 92 00 48	19 92 91 70
12 43 56 35	20 11 74 52	23 46 14 06	05 08 23 41	40 30 97 32
35 09 98 17	01 75 87 53	56 54 14 30	22 20 64 13	62 38 85 79
91 62 68 03	19 47 60 72	15 51 49 38	70 72 58 15	49 12 56 24
89 32 05 05	36 16 81 08	86 43 19 94	20 73 17 90	27 38 84 35
35 44 13 18	45 24 02 84	08 62 48 26	58 26 05 27	50 07 39 98
37 54 87 30	41 94 15 09	18 51 62 32	21 15 94 66	77 56 78 51
94 62 46 11	96 38 27 07	95 10 04 06	92 74 59 73	71 17 78 17
00 38 75 95	71 96 12 82	75 24 91 40	70 14 66 70	60 91 10 62
77 93 89 19	98 14 50 65	63 33 25 37	52 28 25 62	47 83 41 13
80 81 45 17	77 55 73 22	02 94 39 02	49 91 45 23	68 47 92 76
36 04 09 03	80 99 33 71	17 84 56 11	33 69 45 98	26 94 03 68
88 46 12 33	52 07 98 48	66 44 98 83	10 48 19 49	85 15 74 79
15 02 00 99	31 24 96 47	32 47 79 28	55 07 37 42	11 10 00 20
01 84 87 69	87 63 79 19	07 49 41 38	60 64 93 29	16 50 53 44
09 73 25 33	60 97 09 34	10 94 05 58	19 69 04 46	26 45 74 77
54 20 48 05	29 40 52 42	72 56 82 48	47 44 52 66	95 27 07 99
42 26 89 53	18 47 54 06	74 67 00 78	55 72 85 73	67 89 75 43
01 90 25 29	90 36 47 64	76 66 79 51	48 11 62 13	97 34 40 87
80 79 99 70	93 78 56 13	82 60 89 28	52 37 83 17	73 20 88 98
06 57 47 17	73 03 95 71	04 77 69 74	65 33 71 24	76 52 01 35
06 01 08 05	21 11 57 82	31 82 23 74	23 28 72 95	64 89 47 42
26 97 76 02	45 52 16 42	23 60 02 10	90 10 33 93	19 64 50 93
57 33 21 35	76 62 11 39	93 68 72 03	78 56 52 01	09 37 67 07
79 64 57 53	96 29 77 88	42 75 67 88	70 61 74 29	80 15 73 61
99 90 88 96	94 75 08 99	16 28 35 54	85 39 41 18	34 07 27 68
43 54 85 81	53 14 03 33	29 73 41 35	97 11 89 63	45 57 18 24
15 12 33 87	57 60 04 08	97 92 65 75	84 96 28 52	02 05 16 56
86 10 25 91	96 64 48 94	86 07 46 97	20 82 66 95	05 32 54 70
01 02 46 74	43 65 17 70	21 95 25 63	05 01 45 11	03 52 96 47
79 01 71 19	65 39 45 95	92 43 37 29	80 95 90 91	67 35 48 76
33 51 29 69	82 39 61 01	36 78 38 48	20 63 61 04	80 52 40 37
38 17 15 39	91 19 04 25	62 24 44 31	15 95 33 47	20 90 25 60
29 53 68 70	03 07 11 20	86 84 87 67	88 67 67 43	31 13 11 65
58 40 44 01	26 25 22 96	93 59 14 16	98 95 11 68	03 23 66 53
39 09 47 34	61 96 27 93	86 25 10 25	65 81 33 98	69 73 61 70
88 69 51 19	54 69 28 23	11 96 38 96	86 79 90 94	30 34 26 14
25 01 62 52	77 97 45 00	35 13 54 62	73 05 38 52	66 57 48 18
74 85 22 05	13 02 12 48	60 94 97 00	28 46 82 87	55 35 75 48
05 45 56 14	93 91 08 36	28 14 40 77	60 93 52 03	80 83 42 82
52 52 75 80	86 74 31 71	56 70 70 07	14 90 56 86	17 46 85 09
56 12 71 92	18 74 39 24	95 66 00 00	39 80 82 77	17 72 70 80
09 97 33 34	66 67 43 68	41 92 15 85	06 28 89 80	77 40 27 72
32 30 75 75	59 04 79 00	66 79 45 43	86 50 75 84	66 25 22 91
10 51 82 16	01 54 03 54	88 88 15 53	87 51 76 49	14 22 56 85